

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.М. МИТРОФАНОВ

ОБРАБОТКА И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

2-е издание

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 550.380.14(075.8)
М 672

Рецензенты:

академик РАН, профессор, доктор техн. наук *М.И. Эпов*
профессор РАН, доктор физ.-мат. наук *А.Л. Карчевский*

Работа подготовлена на кафедре геофизических систем
физико-технического факультета для студентов, обучающихся
по профилю «Интеллектуальные геофизические системы и приборы»

Митрофанов Г.М.

М 672 **Обработка и интерпретация геофизических данных : учебное пособие / Г.М. Митрофанов. – 2-е изд. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2019. – 168 с.: цв. ил.**

ISBN 978-5-7782-3805-3

Пособие является базовой частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Обработка и интерпретация геофизических данных». Оно включает в себя основы указанного курса по трем главным разделам: решаемые задачи и получаемые геофизические данные, линейные и нелинейные методы обработки, методы интерпретации. Приведены также рекомендации по выполнению расчетно-графических и контрольных работ с указанием возможных тем рефератов. В приложениях даны базовые сведения по математическим разделам, наиболее используемым в лекционном материале курса. Пособие составлено в соответствии с ФГОС ВО и рабочей программой по дисциплине «Обработка и интерпретация геофизических данных».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств».

УДК 550.380.14(075.8)

ISBN 978-5-7782-3805-3

© Митрофанов Г.М., 2017, 2019
© Новосибирский государственный
технический университет, 2017, 2019

ВВЕДЕНИЕ

В пособии содержится общее изложение материалов, рассматриваемых в данном курсе. Его основная цель – объяснить особенности и возможности использования современных методов обработки, интерпретации геофизических данных, получаемых при исследовании земных недр. Пособие адресовано студентам старших курсов, обучающимся по новой специальности «Интеллектуальные геофизические системы», которая организована на ФТФ НГТУ. Его также можно использовать при подготовке курсовых и квалификационных работ студентами других специальностей, связанных с методами изучения строения и свойств Земли или прикладной математики.

При разработке курса в его основу были положены три главные идеи.

Первая заключается в том, что обработка геофизических данных выростала из математической физики, численного и статистического анализа. Поэтому при его преподавании можно учитывать, что со многими важными понятиями, применяемыми при рассмотрении различных методов обработки геофизических материалов, студенты знакомы в базовых курсах, составляющих фундамент общего естественно-научного цикла бакалаврской подготовки специалистов физико-технических и физико-математических специальностей.

Вторая связывает процесс обработки данных с решаемыми задачами. В рассматриваемом предмете данные имеют непосредственное отношение к решаемым геофизическим и геологоразведочным задачам. Таким образом, здесь должны присутствовать элементы интерпретации, которые относятся как к исходным данным, получаемым в реальном эксперименте, так и к результатам их обработки. Процесс интерпретации в геофизических исследованиях опирается на модельные представления об изучаемом объекте и включает в себя понятия прямых и обратных задач. Здесь важно, чтобы студенты научились

понимать, каким образом формализованные модели приближают реальные объекты и как процедуры обработки, построенные в рамках таких моделей, влияют на решение целевых задач.

Третья требует учета специфических особенностей геофизических данных. Кроме того, также полагают, что студенты знакомы с основами физических измерений на уровне лабораторных практик. Это позволяет достаточно просто объяснить им измерения естественных и искусственно созданных физических полей в натурном эксперименте. Важным представляется демонстрация отличий, которые могут иметь измеряемые величины в лабораторных и реальных условиях. Поэтому при изучении конкретных методов и алгоритмов обработки большое внимание должно быть уделено отличию реального и модельного эксперимента. Акцентирование внимания студентов на подобных вопросах важно и с точки зрения их подготовки как будущих специалистов, определяющих набор и последовательность обрабатываемых процедур в реальном процессинге.

Следует отметить еще один важный момент: традиционное обучение процедурам обработки данных основывается на рассмотрении одноканальных наблюдений. При этом часто многоканальные наблюдения вводятся через формальный переход к многомерным функциям. Этот методический прием удобен с математической позиции и используется в большинстве учебников по спектральному анализу, фильтрации и статистической обработке данных. Однако он не отвечает современному геофизическому процессу, где анализ данных и выделение целевых сигналов часто основаны на построении многомерных, интерпретационных характеристик среды. Классическими примерами являются: направленное суммирование, миграционные преобразования, способы построения скоростной модели среды или поверхностно-согласованная деконволюция, где одномерная обратная фильтрация играет не главную, а лишь вспомогательную роль. Указанная многоканальность или многомерность обработки геофизических данных, связанная с особенностями получаемых геофизических данных и интерпретационных моделей, является существенным моментом курса.

В развитие последнего тезиса отметим, что геофизические исследования по сложности задач и объемам анализируемой информации относятся к одному из высших уровней познания природы. Не случайно на это обратил внимание выдающийся физик Ричард Фейнман, получивший Нобелевскую премию за исследования в области квантовой электродинамики. Он ставил геологические науки по сложности изу-

чаемых объектов на несколько ступеней выше, чем науки, относящиеся к области элементарных частиц. Современная тенденция в развитии геофизики, создававшейся на основах физики в конце XIX и начале XX века, указывает на то, что к настоящему времени она подошла к проблемам построения собственных моделей, которые по уровню могут быть близки к экономическим и биологическим моделям. Свидетельством того, что геофизические задачи могут способствовать существенному развитию общих методов и технологий, служат обратные задачи и вейвлет-преобразования. Появление первых было связано с необходимостью определения параметров сложных объектов по ограниченным совокупностям данных, а вторые родились благодаря исследованиям сейсмических сигналов, отраженных от целевых горизонтов среды. Таким образом, для студентов, специализирующихся в области геофизических исследований, открываются большие перспективы творчества, и возможно, что они сыграют значимую роль в развитии основ изучения сложно построенных сред.

В структуре курса выделены три основных блока, которые сформированы на основе указанных выше идей и оформлены в виде отдельных глав.

В первом блоке (глава 1) дано общее представление об объектах геофизических исследований и данных, которые используются при их изучении. При этом отмечены характерные особенности объектов исследования и методов получения соответствующих данных. Важный аспект для последующей обработки и интерпретации получаемых данных – это понятие выделяемой или полезной компоненты. Ее определение влияет на выбор процедур обработки, но само разделение данных на полезную и мешающую компоненты считается условным. Студентам полезно осознавать такую условность, чтобы прийти к пониманию идеи о различии двух типов задач: выделения некоторых компонент или сигналов и оценивания их параметров, которые могут быть связаны с характеристиками среды.

Во втором блоке (глава 2) приведены некоторые методы обработки. Следует отметить, что в настоящее время имеется значительное число пакетов программ, где реализованы различные алгоритмы, позволяющие выполнять анализ и преобразования данных. Часто такие алгоритмы скрыты интерфейсами, позволяющими указывать лишь тип преобразования и требуемые параметры. Поэтому, по мнению автора, студентам важно понимать смысл этих преобразований и их назначение, а уже конкретную реализацию алгоритмов и ее особенности они

смогут освоить самостоятельно при работе с определенным программным продуктом. Такая идея позволила автору выделить несколько основных направлений в большом разнообразии существующих методов обработки и обсудить их особенности. При знакомстве с этими методами, отвечающими этим направлениям, и их обсуждении автор настоящей работы стремился, чтобы у студентов формировалось достаточно важное представление о том, что конкретная реализация может быть направлена на определенные свойства данных или решаемые задачи. Такая направленность может ограничивать возможности метода и должна учитываться при его использовании.

Третий блок (глава 3) посвящен вопросам интерпретации данных и результатов их обработки. Как и в случае с методами обработки, в настоящее время имеется большое количество программных интерпретационных комплексов. Поэтому в курсе дается общее представление о методах интерпретации, а также их связь с решением обратных задач. Последнее позволяет студентам, не имеющим достаточного геологического образования, соотнести понятие интерпретационных моделей с задачами оценивания параметров среды. Кроме того, демонстрируется важность априорных данных и влияние процедур обработки на результаты интерпретации.

Основные блоки завершаются несколькими приложениями, куда вынесены существенные и полезные математические аспекты, необходимые для понимания методов обработки. Такая структура позволила облегчить основной текст пособия для первоначального знакомства с предметом. Приложения включают в себя основные понятия метрических, векторных и линейных пространств, служащих фундаментом для самых различных преобразований геофизических данных, в частности, для современных методов спектрального анализа. Кроме того, в них даны главные свойства SVD-разложения, являющегося одним из общих инструментов решения систем линейных уравнений, и представлены основы статистических методов анализа случайных событий. Очевидно, что небольшой объем приложений не позволяет обеспечить полноту изложения материала. Поэтому в тексте приводятся комментарии к математическим аспектам, которые могут помочь в их восприятии на интуитивном уровне и сформировать желание более глубокого изучения соответствующих разделов.

Являясь специалистом в области сейсмических методов исследования, автор не мог достаточно глубоко познакомить студентов со многими другими областями геофизических исследований. Поэтому

потребовалась консультация соответствующих специалистов в области магниторазведки П.Г. Дядькова и Л.В. Цибизова; в области электро-разведки В.М. Глинского и А.А. Власова; в области гравиразведки А.Н. Василевского; в области геологической интерпретации геофизических данных Г.О. Ухлову. Им всем большая благодарность за ту помощь, которую они оказали при подготовке этого курса.

Закончим фразой Ричарда Феймана, которая после небольшого изменения может быть обращена к будущим специалистам геофизикам: «Я думаю, что попытки отгадать уравнение, возможно, являются наилучшим способом определить законы той части физики, которая неизвестна в настоящее время». Однако для таких догадок необходимо знать предмет, с которым работаем. Знаний и успехов вам!

ГЛАВА 1

РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛУЧАЕМЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

1.1. ОБЪЕКТЫ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Как было сказано во введении, обработка геофизических данных может существенно зависеть от объекта исследований, относительно которого формулируется геофизическая задача. В идеальной ситуации проводимый геофизический эксперимент и получаемые в нем наблюдения должны быть ориентированы на изучаемый объект. Однако одной из существенных особенностей геофизических исследований является именно невозможность точного определения изучаемого объекта до проведения натурного эксперимента. Вид объекта и его характеристики находятся в процессе проводимого исследования. Поэтому получаемые данные часто определяются с избытком, а процесс обработки носит итерационный характер с существенными моментами использования априорной информации и комплексирования различных методов получения информации об объекте.

Для лучшего понимания особенностей геофизических данных потратим некоторое время, чтобы обсудить следующий важный вопрос: *Что является основным объектом геофизических исследований?*

Это Земля. Ее структура, свойства ее пород и процессов, в ней протекающих, требуют изучения. Геофизика дает возможность такого исследования посредством измерения и интерпретации количественных физических характеристик. Наибольшая информация о внутреннем строении Земли, так же как и свойствах пород на больших глубинах, а также физических феноменах, которые с Землей связаны или в ней протекают, были получены посредством геофизических измерений

в комплексе со скважинными данными. При этом физические феномены могут быть простыми по своей природе и представлять собой выраженные физические процессы, например естественное гравиметрическое поле, или могут быть и сложными взаимодействиями различных физических процессов, как электросейсмический эффект. Кроме того, Земля представляет собой очень сложный объект с большими изменениями масштабов и свойств для всех ее характеристик. Здесь масштабы объектов исследований могут меняться от тысяч километров до микрон.

На рис. 1.1 представлена структура двух образов детальных элементов Земли, которые имеют различные масштабы. Оба образа были созданы на основе геофизических исследований. Как видим, элементы с различными масштабами будут иметь сложное строение, и эти сложности в структуре земных элементов могут быть интересны для изучения. Например, в части рис. 1, *а* наблюдается интересный объект в форме большого амфитеатра взрывного происхождения и северо-восточного направления. Он может указывать на последствия космической катастрофы, которая могла вызвать существенные изменения на огромных пространствах поверхности и атмосферы Земли.

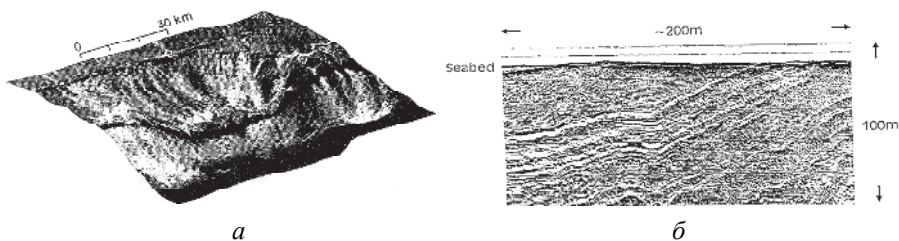


Рис. 1.1. Различные виды образов структуры Земли, определенные с помощью геофизических методов:

- а* – составной образ части континентального склона севернее Пуэрто Рико;
- б* – образ известняков и глин юрского возраста морского побережья Дорсет, южнее Англии (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

Большое различие также может быть найдено в свойствах пород, которые могут изменяться как по глубине, так и по простираению. В этом просто убедиться, если взять лопату и прокопать даже небольшую траншею. Сложность строения среды на больших глубинах можно увидеть, анализируя скважинные данные. Петрофизические исследования показывают, что даже при очень небольших объемах вещества

мы будем иметь существенные различия, которые не могут быть просто осредненными. Такое осреднение может приводить к потере полезной информации об изменении вещественного состава среды, что часто является основной задачей исследований. При этом существенно изменяется не только состав пород, но и физические параметры, характеризующие состояние вещества и пород на больших глубинах.

Примеры возможных изменений показаны на рис. 1.2, где представлены литологическая колонка, значения скважинных геофизических параметров и результаты их интерпретации. Дополнительные сложности связаны с проблемой, что все эти изменения элементов среды являются удаленными от нас и скрытыми другими частями среды. Часто у нас нет возможности для их непосредственного анализа. Таким образом, мы должны использовать геофизическое исследование как дистанционный метод при их изучении.

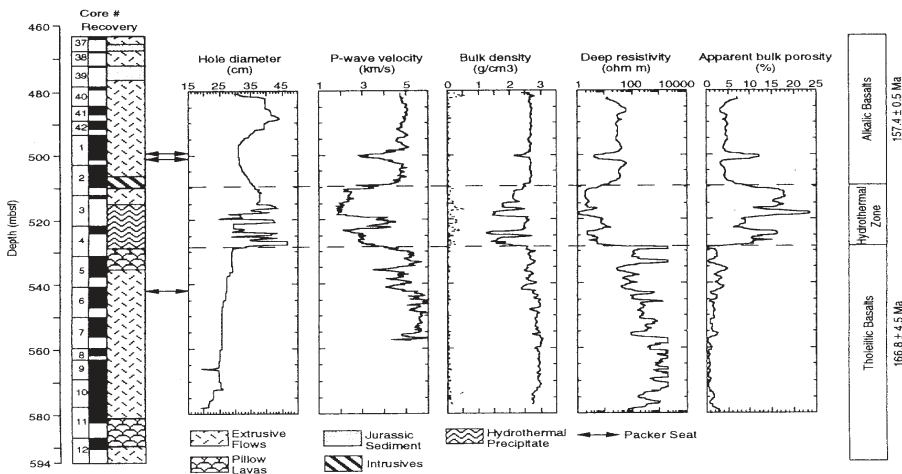


Рис. 1.2. Определение характеристик пород по геофизическим и скважинным данным в вулканическом фундаменте в рамках проекта глубокого морского бурения, западная часть Тихого океана (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

Разномасштабность и высокая неоднородность изучаемых объектов среды требуют использования различных геофизических и других методов исследования. Прикладные геофизические работы являются подмножеством этого обширного поля исследований и используют

сейсмометрические, гравиметрические, магнитометрические, электрометрические, электромагнитометрические и радиометрические методы. Общая характеристика геофизических методов как части интерпретационных систем будет дана далее в главе 3. Для каждого из этих методов проводятся специальные геофизические работы, которые обеспечивают соответствующие измерения физических параметров. Такие параметры позволяют изучать отдельные детали структуры и физических свойств Земли. Но все вместе они дают нам достаточно точное знание о нашем изучаемом объекте.

Например, при магнитометрических работах измеряют полное магнитное поле или его компоненту (такую, как вертикальную) на серии различных профилей, покрывающих исследуемую область. Обычно эти измерения концентрируются в областях магнитных аномалий или в областях изучаемых глубин. При разведочных работах на нефть и газ часто используются работы по трехмерной сейсмике, часто обозначаемой как 3D. Такая 3D-сейсмическая информация, используемая для изображения среды, дает существенное улучшение детальности, чем традиционная 2D-сейсмика для определения геологических условий, относящихся к месторождениям нефти и газа. Однако все эти данные обладают своими особенностями, которые часто сильно различаются между собой. Как и изучаемый с их помощью объект, они обладают различными объемами и структурой.

1.2. СВЯЗЬ ДАННЫХ С ОБЪЕКТАМИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим, как использование геофизических данных или геофизических сигналов способствует изучению целевых объектов среды. Начнем с данных, относящихся к поверхностным наблюдениям. Они, как правило, позволяют изучать особенности строения среды в существенно больших объемах, чем геофизические исследования в скважинах, но при этом обеспечивают меньшую точность для исследуемых объектов.

Обратимся к магнитным данным, которые имеют достаточно простую структуру. На рис. 1.3 можно видеть результаты измерения магнитного поля по протяженному профилю. Данные представлены как непрерывные измерения. Не нужно быть геофизиком, чтобы догадаться, что большие вариации наблюдаемого магнитного поля определяют скрытое намагниченное вещество. Поэтому важно выделять такие

аномалии в наблюдениях. Мы точно никогда не знаем, что скрывается за этими аномалиями, но цифровой анализ может помочь при выделении и интерпретации скрытых объектов. В первую очередь в нашем случае мы должны оценить и удалить региональную составляющую магнитного поля (пунктирная линия в верхней части рисунка). Значимые и короткопериодные аномалии, представленные в средней части рис. 1.3, достаточно просто выделяются после такого преобразования. Они соотносятся с островами Капе Верде. Их можно связать с высоко намагниченными вулканическими породами, имеющими небольшую глубину залегания. Таким образом, выделенные аномалии служат основой для выполнения модельных построений, относящихся к глубинному строению и процессам образования имеющихся островов.

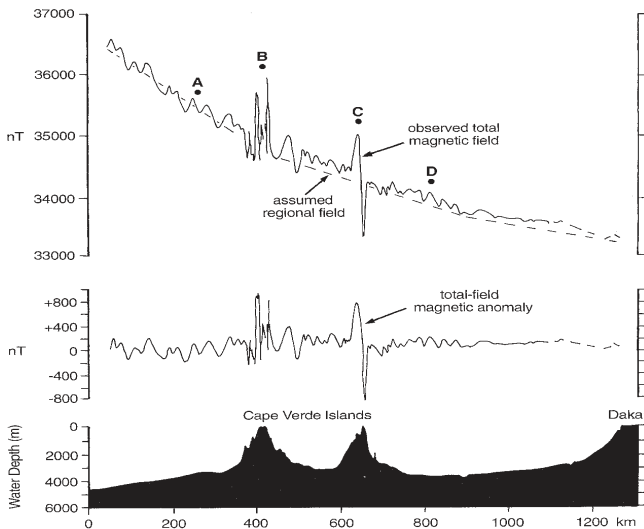


Рис. 1.3. Магнитный профиль, записанный между островами Капе Верде и Дакар, Сенегал (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

На рис. 1.3 показано, что выделяемые аномалии могут составлять очень малую часть измеряемой величины. Иногда они составляют доли процента в проводимых измерениях. Очевидным следствием малости целевых вариаций служит разработка высокоточных измерительных систем, которые в настоящее время могут обеспечивать точность $10^{-9} \dots 10^{-10}$ по отношению к измеряемой величине. Малость выделяе-

мых вариаций требует учета возможных естественных вариаций, присутствующих в наблюдаемых величинах. На рис. 1.4 показаны возможные естественные вариации магнитного поля, происходящие в течение часа (рис. 1.4, *a*) или дня (рис. 1.4, *б*) в различных точках Земли.

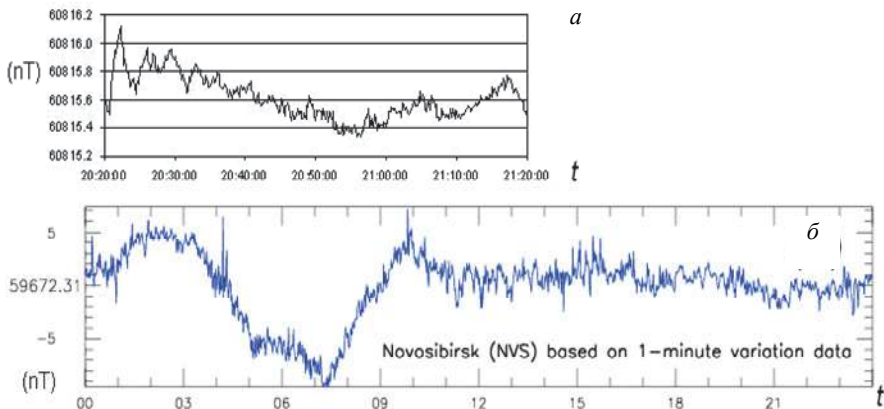


Рис. 1.4. Вариации магнитного поля Земли (примеры взяты из Интернета)

Очевидно, что регулярные аномальные особенности, проявляющиеся в естественных вариациях магнитного поля, могут быть приняты за полезные события, относящиеся к локальным особенностям изучаемого объекта. Поэтому их необходимо изучать и учитывать в процессе обработки данных, а также при интерпретации получаемых результатов. Этим вопросам будет уделено большое внимание в последующих разделах курса.

Близкими по своей структуре к магнитным данным являются гравитационные наблюдения. Они позволяют нам определять тела с различной плотностью, находящиеся на различной глубине под поверхностью Земли [11]. Пример таких данных показан на рис. 1.5. Здесь воздушные наблюдения (мелкие точки) нанесены совместно с морскими стационарными наблюдениями (большие точки) и профильными наблюдениями (сплошная линия). Имеющиеся различия в данных указывают на их возможное рассогласование по точности измерений и несовпадения профилей.

Отличными по виду и объему являются сейсмические данные, которые содержат в себе существенную информацию как о структурных

особенностях строения среды, так и о различных физических характеристиках. Один пример таких данных приведен на рис. 1.6.

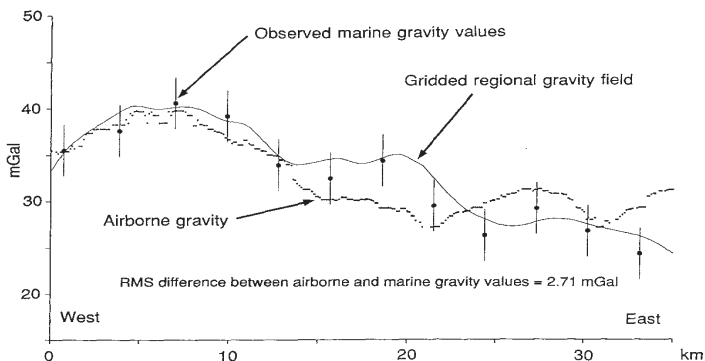


Рис. 1.5. Воздушные гравитационные измерения по профилю через пролив Лонг Айленд, США (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

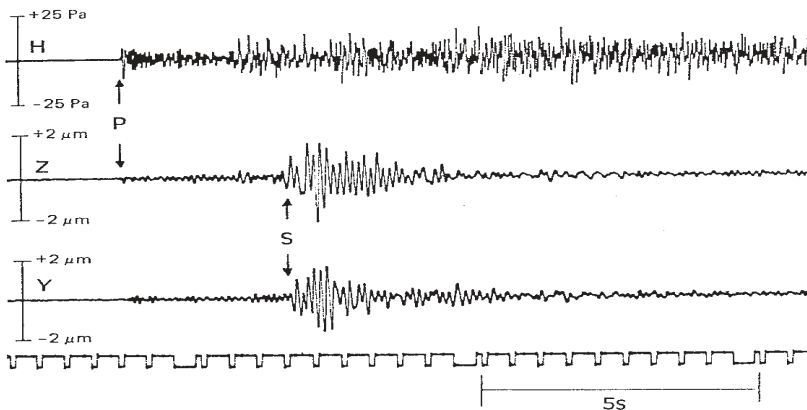
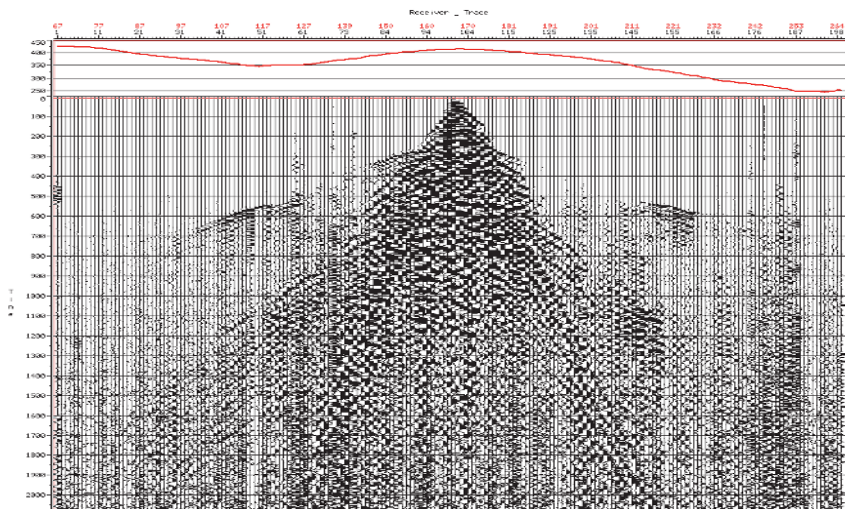
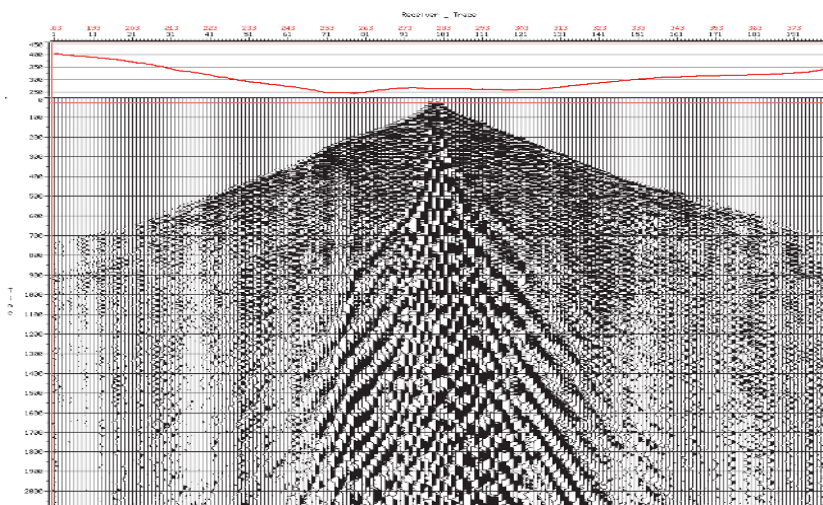


Рис. 1.6. Сейсмограммы, записанные на макушке Атлантического гребня недалеко от 37° N (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

Эти сейсмологические данные были зарегистрированы посредством использования двух донных геофонов и гидрофона. Геофоны регистрировали вертикальное (Z) и горизонтальное (Y) перемещение почвы, а гидрофон записывал изменение давления в воде (H). Можно



a



б

Рис. 1.7. Различные виды сейсмограмм, записанные при наземных работах на разных профилях:
a – для водораздела; *б* – для поймы

видеть, что эти данные отчетливо выделяют P -волны от близкого землетрясения резким возрастанием давления на трассе, относящейся к гидрофону, и по низкой амплитуде, появляющейся на Z - и Y -каналах геофона. Заметим, что S -волны регистрируются только по смещению дна.

Необходимо отметить одну важную вещь, связанную с сейсмическими данными. Они регистрируют некоторые физические параметры (смещение или давление) в фиксированной точке в зависимости от времени. Ранее мы рассматривали изменение физических параметров по пространственной координате (в магнитных и гравитационных примерах). В случае сейсмических экспериментов также можно иметь профильные данные, располагая приемники по некоторым линиям (профилям наблюдений) или по пространству, объединяя наблюдения в скважине с наблюдениями на поверхности.

На рис. 1.7 приведены примеры профильных сейсмических наблюдений, полученных в Восточной Сибири.

1.3. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Геофизические данные, такие как изменение магнитного, электрического или гравиметрического поля, а также сейсмические волновые поля, являются непрерывными по своей природе. Поэтому на ранних этапах появления и развития геофизических методов исследования Земли регистрация требуемых величин выполнялась аналоговыми устройствами в непрерывной форме. Но, как было отмечено выше, в процессе анализа данных при изучении целевых объектов среды полезно использовать различные математические методы обработки, моделирования и инверсии. Поэтому информация должна быть представлена в цифровой форме. Особенно это оказалось существенным после начала активного внедрения в геофизические исследования вычислительной техники, где цифровой формат данных имел принципиальное значение [3, 5, 9].

Переход к цифровой форме может быть выполнен различными способами. На рис. 1.8 представлены некоторые из них. Рассмотрим эти способы более внимательно, что важно для понимания особенностей представления и обработки реальных геофизических данных. График магнитного поля, изображенный на рис. 1.8, *a*, представляет собой непрерывную вариацию, изменяющуюся с расстоянием. На са-

мом деле оба параметра сигнала – амплитуда и расстояние – могут быть дискретизированы в процессе записи. В этом случае получается вертикальная *амплитудная оцифровка* (также известная как *точность оцифровки* или *амплитудное квантование*) и горизонтальная *оцифровка интервала* (или *оцифровка квантованием*). Это приводит к четырем комбинациям: непрерывная амплитуда и непрерывное пространство (или время) для значений (как были представлены исходные данные); непрерывные значения амплитуды и дискретные отсчеты по пространству (или времени), рис. 1.8, *б*; дискретные отсчеты амплитуды и непрерывные значения по пространству (или времени), рис. 1.8, *в*; дискретные отсчеты амплитуды и дискретные отсчеты по пространству (или времени), рис. 1.8, *г*. На этих рисунках можно увидеть, какого вида различия возникают в рассматриваемых комбинациях.

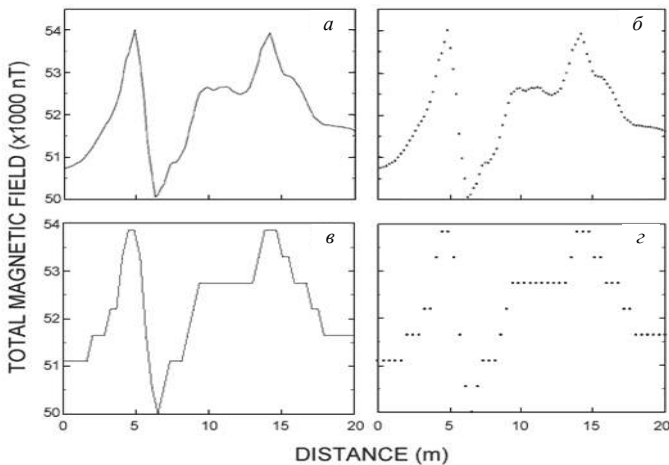


Рис. 1.8. Часть магнитного профиля, записанного Национальной лабораторией недалеко от Лос Аламос, США, и различные способы дискретизации амплитуды:

а – исходные данные; *б* – непрерывная амплитуда с равномерной оцифровкой (100 дискретов на запись); *в* – дискретизация амплитуды по восьми уровням; *г* – дискретизация амплитуды по восьми уровням и равномерная оцифровка по расстоянию (50 дискретов) (примеры взяты из Интернета)

Указанная оцифровка может быть настолько плотной (с малым шагом квантования), что будет создаваться впечатление непрерывности

сигнала. Так, магнитная запись из Лос Аламоса, изображенная на рис. 1.8, *a*, выглядит как совершенно непрерывная. При использовании 100 отсчетов мы приходим к виду нашей второй комбинации. Иллюстрацией третьей и четвертой комбинаций являются разбиение амплитуды на восемь уровней и 50 отсчетов. На рис. 1.8, *z* иллюстрируется способ, наиболее часто используемый при записи геофизических данных, т. е. с дискретизацией по обоим переменным: амплитуде и пространству (или времени). При этом получают серьезные искажения для двух последних случаев (рис. 1.8, *b* и *z*). При работе с конкретными данными, имеющими соответствующее представление, могут возникнуть большие сложности при использовании отдельных алгоритмов, особенно если учитывать, что целевые выделяемые аномалии могут составлять лишь доли процента (см. разд. 1.1) измеряемой величины.

Таким образом, если вы еще не осведомлены обо всей суровости проблемы оцифровки, то не сможете иметь качественный и правильный результат, отвечающий непрерывному представлению данных. Понимание опустошительных последствий оцифровки и того, как требуется записывать данные, является предметом отдельного глубокого изучения [8].

1.4. ОСОБЕННОСТИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ И МЕТОДОВ ИХ ПОЛУЧЕНИЯ

Использование дискретизации при регистрации и хранении таких данных определяет нам их первую важную особенность.

1-я особенность. Современные геофизические данные представлены в дискретной форме.

При этом для решения поставленной задачи существенным может оказаться вид используемого представления по различным переменным (амплитудной, временной, пространственным). К этим вопросам мы вернемся позже, в частности, при изучении аспектов спектрального анализа (см. разд. 2.7), результаты которого могут рассматриваться как один из возможных способов представления геофизических данных. Но главные вопросы будут относиться к получению информации об изучаемом объекте среды и ее потере.

Выше отмечалось различие в структуре данных, получаемых при рассмотрении потенциальных полей (гравиметрического, магнитного, электрического) и сейсмического поля. Но даже в рамках одного геофизического поля условия проведения реального эксперимента могут

существенно менять структуру получаемых данных. Так, сопоставление сейсмограмм, изображенных на рис. 1.7 и 1.9, свидетельствует о том, что морские данные проще по структуре, чем наземные. Это позволяет существенно повышать точность анализа характеристик сигналов, относящихся к целевым объектам среды [12].

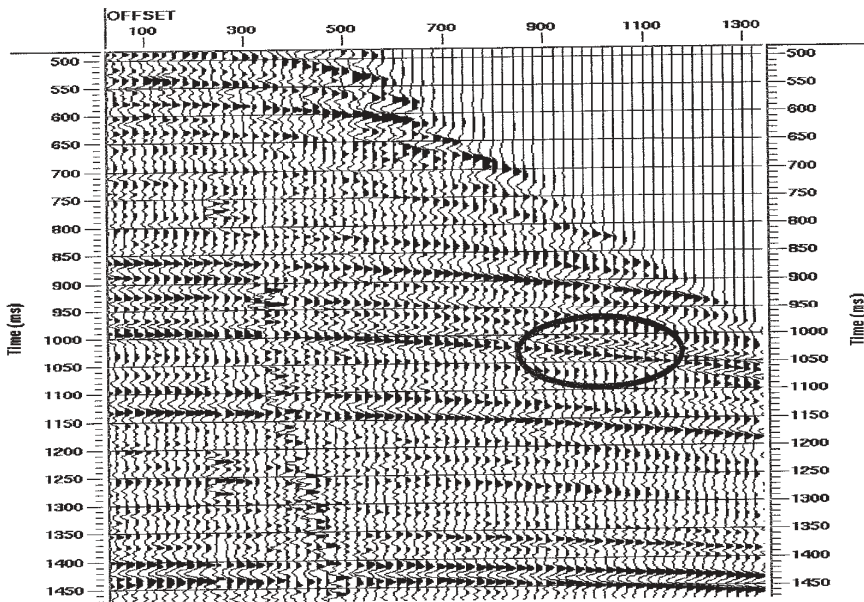


Рис. 1.9. Пример сейсмограммы, записанной по пространственному профилю при морской сейсморазведке с выделенной областью анализа отражения от целевого горизонта

Однако вне зависимости от сложности сейсмических данных нам необходимо разделять наблюдаемое сейсмическое поле по различным волновым объектам, чтобы получить информацию о целевых объектах среды. Такое разделение может быть выполнено с использованием специальных процедур.

Один из примеров использования подобных процедур дан на рис. 1.10. Правая часть этого рисунка (см. (б)) имеет изображение контура когерентности, соответствующего разрастаниям, получаемым по трассам ОЦТ (общей центральной точки) и отвечающим отражениям, определенным в скважине.

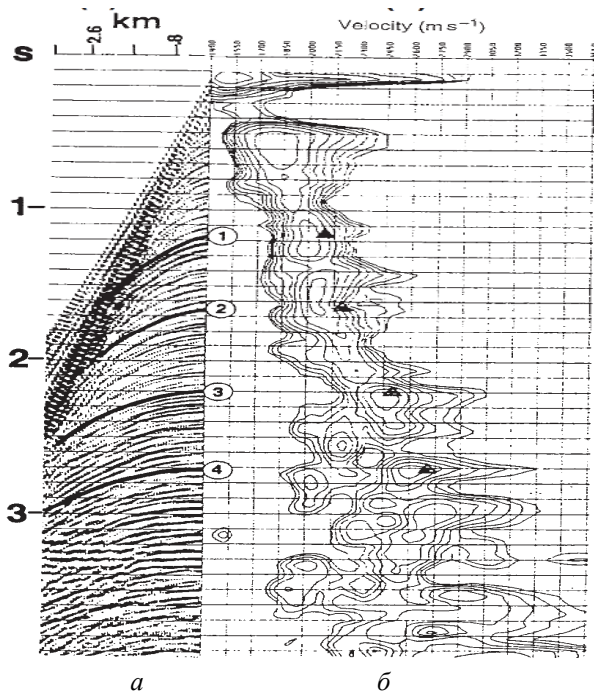


Рис. 1.10. Скоростной анализ, основанный на выборке трасс ОЦТ (а) и функции подбора (б) (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

Все представленные выше сейсмические данные относились к 2D-наблюдениям. Как было сказано выше, современные сейсмические исследования часто используют 3D-системы наблюдения, которые дают более точную информацию о структуре и параметрах среды. Однако эти системы содержат существенно большее число наблюдений (часто представляют сотни тысяч сейсмограмм), которые позволяют сформировать результирующий куб данных. Пример такого куба с результатами интерпретации приведен на рис. 1.11. На нем отчетливо видны все преимущества использования таких наблюдений.

Рассмотрение и использование сейсмических данных наиболее ярко показывает еще одну важную особенность современных геофизических данных.

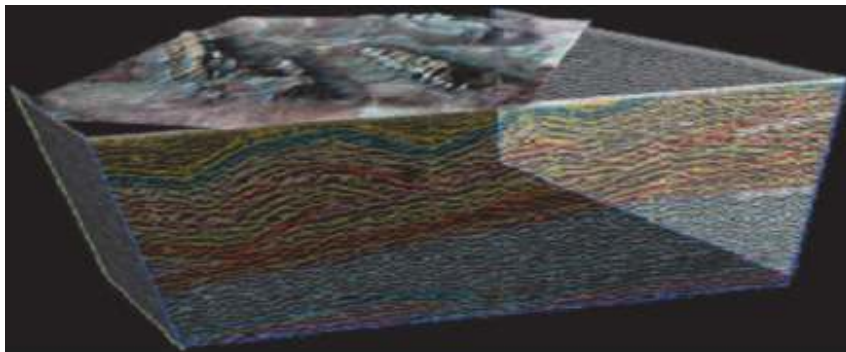


Рис. 1.11. Результаты обработки и интерпретации 3D-данных

2-я особенность. Они могут иметь существенные различия по виду и объему.

Эта особенность обеспечивает широкие возможности по созданию новых методов и технологий их обработки. Одновременно усложняются задачи по эффективному и комплексному использованию всей получаемой геолого-геофизической информации.

Теперь рассмотрим примеры скважинных геофизических данных. На рис. 1.12 дан некоторый пример данных вертикального сейсмического профилирования (ВСП). По рисунку можно понять, что они представляют собой сейсмическое волновое поле специальной природы, которое обладает более простой структурой, чем поверхностные наблюдения. Такие данные позволяют достаточно надежно выделять отраженные и преломленные волны различной природы, которые формируются в области среды, где расположена скважина. В частности, они показывают процесс формирования отраженных обменных PS-волн в исследуемой части среды (голубой цвет на рисунке).

Другие примеры скважинных данных показаны на рис. 1.13. Здесь даны результаты нейтронного каротажа (в левой части рисунка) и индукционного каротажа (в правой части рисунка). Структура этих данных очень неоднородна с большими вариациями в значениях параметров, что может указывать на высокую чувствительность методов и их реакцию на изменения физических параметров окружающей среды. При этом вариации параметров часто носят периодический характер с изменением вида выделяемых периодических функций. Такие изменения позволяют находить события, относящиеся к изменению геологического строения среды. Например, по этим данным один такой объект

был опознан с высокой точностью. Это слой Fe-Ti оксидов, которыми обогащены габбро на глубине 225...270 м ниже океанического дна.

Рассмотрение всех представленных геофизических данных дает возможность сделать следующие дополнительные выводы о двух важных особенностях, которые будут иметь значение для нас в будущем.

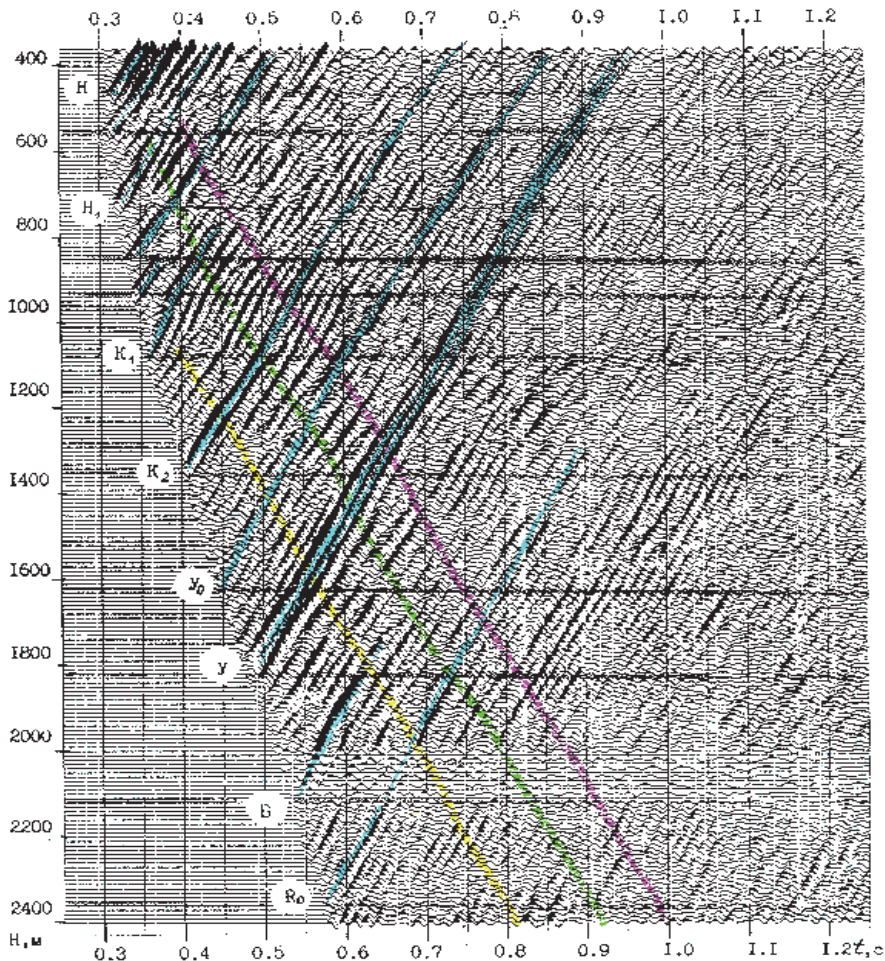


Рис. 1.12. Результаты разделения и интерпретации сейсмического волнового поля по данным ВСП (X-компонента)

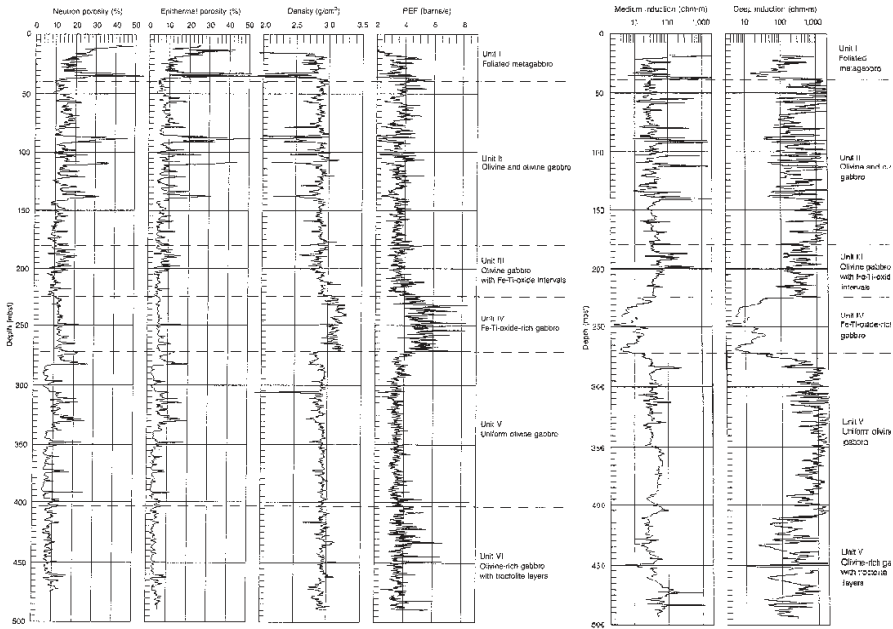


Рис. 1.13. Примеры различных скважинных данных, полученных в вулканическом фундаменте Индийского океана (из книги «Marine geophysics», Jones, 1999)

3-я особенность. Геофизические данные по своей структуре часто близки к гармоническим процессам с различными частотами.

4-я особенность. Для последующего анализа и интерпретации наиболее интересным представляется выделение отдельных событий, которые могут быть связаны с изменением свойств среды.

Выделим еще одну существенную особенность рассматриваемых данных. Ее можно сформулировать следующим образом.

5-я особенность. Геофизические данные обладают высокой изменчивостью или вариабельностью, которую невозможно полностью контролировать при постановке реального эксперимента.

Принципиально она связана с указанными выше характеристиками изучаемых объектов (разд. 1.1): сложностью и разномасштабностью. Поэтому попытки контроля натуральных экспериментов, особенно связанных с искусственными источниками, постоянно приводят к пониманию того, что отсутствует возможность полного учета всех факторов, влияющих на свойства источника [9]. Такие же выводы делаются

и относительно приемников. Хотя последние могут быть детально калиброваны на стендах в лабораторных условиях, но их перенос в реальную среду нарушает идентичность условий регистрации. Одними из важных моментов здесь выступают окружающая среда и условия контакта приемник–почва.

Кроме рис. 1.13, достаточно наглядно демонстрирующего выделяемую особенность данных, приведем пример с результатами анализа формы реальных сейсмических сигналов. Данные, используемые при анализе, были получены при выполнении работ в акватории Баренцева моря.

Для исследований были взяты сигналы, отвечающие прямой волне в области регистрации, где они не перекрывались сигналами других волн (левая часть рис. 1.14). Образцы отобранных интервалов показаны в правой части рис. 1.14. Следует отметить, что проводимые работы отвечали морским сверхвысокоразрешающим сейсмоакустическим исследованиям, направленным на инженерные изыскания [12]. Поэтому качество источников и приемных систем было исключительно высоким, о чем свидетельствует стабильность формы сигналов прямой волны. Однако детальный анализ спектральных характеристик сигналов, относящихся к прямой проходящей волне и волне-спутнику, показывает, что в них имеются изменения, превышающие 40 % от средних значений. Такой анализ проводился путем построения гистограмм, которые дают достаточно полное представление о характеристиках этих изменений в предположении, что они носят случайный характер (см. приложение 5). Полученные гистограммы также демонстрируют оставшиеся изменения параметров, которые не удается устранить даже тщательной постановкой реального эксперимента.

Требуемые гистограммы строились по значениям амплитудных спектров, принадлежащих относительно узкому и широкому временному интервалу (рис. 1.14). Рассмотрение двух временных интервалов было связано с желанием учесть возможные нестабильные свойства источника в виде небольших дополнительных пульсаций. Значительный объем данных, превышающий сто тысяч наблюдений, позволял проводить построение гистограмм для различных участков профиля, а широкий спектр (от 10 до 3500 Гц) давал возможность проанализировать возможные изменения в широкой полосе частот.

На рис. 1.15 показаны примеры построенных гистограмм, которые отвечали различным участкам профиля наблюдений и одной фиксированной частоте. Подобные же гистограммы были получены и для других частот.

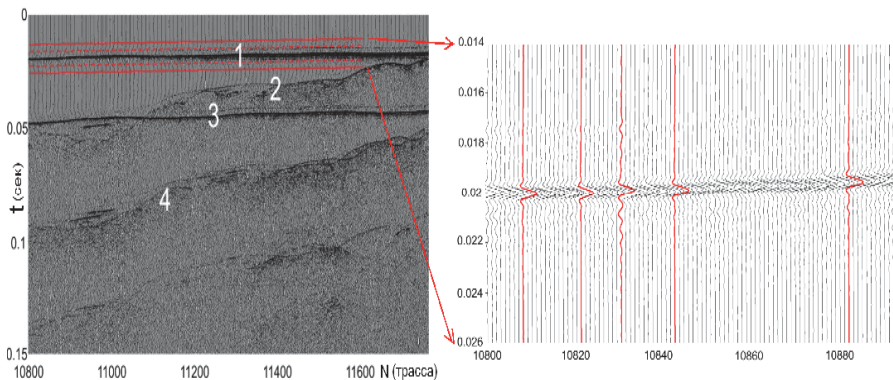


Рис. 1.14. Участок профиля с указанием четырех типов волн:

1 – прямая волна; 2 – отраженная волна от морского дна; 3 – волна-спутник от поверхности моря; 4 – кратная волна. Цветом показаны интервалы для отбора сигналов прямой волны: широкий (сплошная линия) и узкий (пунктирная)

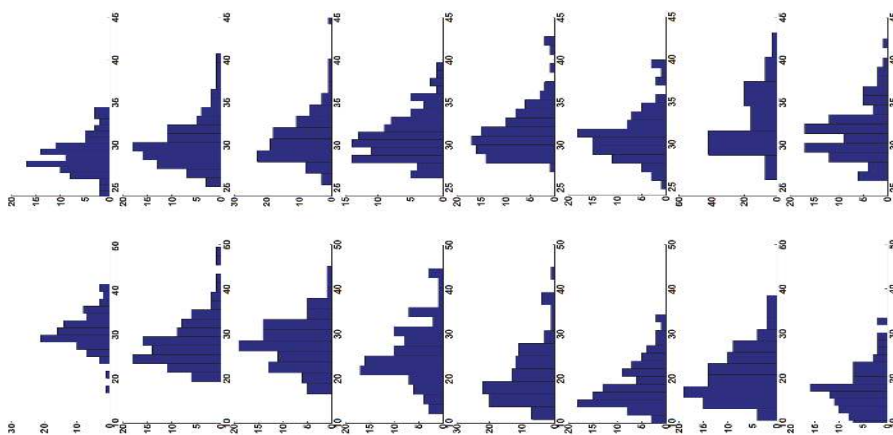


Рис. 1.15. Гистограммы, построенные по значениям спектров прямой волны на частоте 1523 Гц по узкому (верхняя) и широкому (нижняя) интервалам

Структура представленных гистограмм позволяет сделать вывод, что даже для идеальных условий возбуждения и приема сейсмических колебаний в спектре сигналов присутствуют значительные изменения. Дело в том, что при наблюдении устойчивых условий в системе источ-

ник–приемник в однородной среде гистограмма амплитудных спектров сигналов прямой волны должна иметь унимодальную форму, а значения среднеквадратичного отклонения должны быть близки к нулю. Подобное утверждение для морского сейсмического эксперимента считается общепринятым и верным [12]. Полученные же результаты указывают на относительную точность этого утверждения. А самое главное, они требуют исследований того, насколько имеющиеся вариации могут быть значимыми, особенно в плане оценивания целевых параметров среды.

В заключение этого раздела резюмируем главные особенности современных методов получения геофизических данных. Кроме отмеченной в разд. 1.1 значительной удаленности от целевого объекта, они обладают разномасштабностью (от десятков тысяч километров до сантиметров). Разномасштабность требует использования спутниковых и авиационных систем, а также разночастотных наблюдений, где частоты могут изменяться от десятых долей герца до мегагерц.

Одновременно из-за разномасштабности и удаленности исследуемых объектов требуется использование различных регистрирующих приборов и систем наблюдения. Приборы должны работать в достаточно сложных условиях (высокие давления, агрессивные среды), обладать автономностью, ориентироваться в пространстве и обеспечивать высокую точность регистрации измеряемых величин. При этом системы наблюдений должны иметь перекрытие регистрируемых величин с целью их контроля и возможности выделения слабых сигналов (эффектов), связанных с изучаемыми объектами.

Задачи мониторинга состояния среды требуют развития систем наблюдений, обеспечивающих высокую плотность и точность измерения не только по пространственным, но и по временной переменной. Часто при решении этой задачи возникают существенные технические или финансовые ограничения, что делает ее нетривиальной. Например, современные геофизические измерения в скважине требуют необсадного ствола, при эксплуатации скважины обсадка необходима. Кроме того, при мониторинге повышаются требования к качеству обработки и интерпретации геофизических данных.

Перечисленные особенности геофизических данных и методов их получения указывают на важность планирования геофизических исследований. Это может существенно повысить эффективность работ и качество получаемых результатов. При этом очень важно не относиться формально к такого рода планированию. Здесь существенными

могут оказаться имеющиеся априорные сведения о изучаемой области среды. Они могут помочь как в выборе набора геофизических методов, так и в планировании системы наблюдений для каждого из методов.

1.5. ПОНЯТИЕ ПОЛЕЗНОЙ И МЕШАЮЩЕЙ КОМПОНЕНТЫ

При изучении достаточно простых объектов или процессов, обладающих выраженной структурой, несложно определить эти понятия. Так, при рассмотрении процесса скольжения тела по наклонной плоскости сила скольжения, представляющая собой составляющую от силы притяжения, является полезной компонентой, а сила трения представляет собой мешающую компоненту. При анализе движения частиц в ламинарном потоке любые отличия от ламинарности, как и причины их вызывающие, будут являться мешающими компонентами.

Совершенно другая ситуация возникает при изучении сложных объектов, которые характерны для геофизических исследований. Здесь часто может происходить переход полезной компоненты в мешающую и обратно. Дополнительными моментами, влияющими на эти понятия, будут интерпретационная модель, в рамках которой анализируются полученные данные, и высокая степень изменчивости или варибельности исходных данных. Первый момент существенно ограничивает возможный вид наблюдений, так как любые их составляющие, не включаемые в используемую интерпретационную модель, являются мешающими. Поэтому расширение (усложнение) модели, как правило, приводит к включению некоторых составляющих, относившихся к мешающей компоненте, в полезную. Второй момент не позволяет строго (аналитически) охарактеризовать все особенности наблюдений. В результате требуется использование некоторых предположений о случайном характере наблюдаемых величин или применение регуляризирующих процедур, устраняющих (учитывающих) имеющуюся варибельность данных.

В предыдущих разделах при обсуждении геофизических наблюдений и данных, которые получают с их помощью, не использовались формальные обозначения. Сейчас же имеет смысл их ввести. Они будут полезны в дальнейшем при рассмотрении различных способов обработки и преобразования данных.

Начнем с определения геофизического наблюдения как некоторого дискретного пространственно-временного события. В разд. 1.3 уже

обсуждался вопрос о непрерывности и дискретности геофизических данных. В связи с этим только отметим, что современный уровень представления и анализа данных позволяет с достаточной точностью переходить от непрерывного представления к дискретному и обратно, хотя очевидно, что необходимо помнить об их различии и учитывать это при решении конкретных задач.

Еще одним существенным моментом при описании наблюдения является его отношение к источнику измеряемых геофизических величин. Если источник не меняет положения, что является типичным для наблюдения естественных геофизических величин, то некоторое j -е наблюдение будет функцией пространственной точки p_j и временной переменной t . При этом p_j может зависеть от трех пространственных координат (x, y, z) , т. е. $p_j = p_j(x, y, z)$. Следовательно, такое наблюдение можно представлять функцией $y(p_j, t)$, которая в общем случае зависит от четырех переменных: x, y, z, t . Когда источник меняет свое положение, что является характерной особенностью современных систем наблюдений, особенно в сейсморазведке, то вводится точка p_i , определяющая положение i -го источника. В таком случае наблюдение является функцией

$$y(p_i, p_j, t) = y(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j, t), \quad (1.1)$$

зависящей уже от семи переменных, шесть из которых будут пространственными. Эта формальная зависимость позволяет представлять самые различные системы наблюдений и является наиболее общей для реальных геофизических данных.

Введя это представление, сделаем еще один формальный шаг и будем считать, что наблюдение можно разбить на два слагаемых:

$$y(p_i, p_j, t) = f(p_i, p_j, t) + \xi(p_i, p_j, t), \quad (1.2)$$

где $f(p_i, p_j, t)$ представляет собой полезную или выделяемую составляющую (компоненту, сигнал и т. п.), а $\xi(p_i, p_j, t)$ считается некоторой аддитивной составляющей, присутствующей в наблюдении совместно с выделяемой величиной. Часто $\xi(p_i, p_j, t)$ называется помехой или мешающей составляющей. Природа помехи может быть совершенно различной: от естественных вариаций измеряемых вели-

чин (примерами могут служить рис. 1.4, 1.6 и 1.13) до излишнего упрощения модельных представлений (примеры – рис. 1.10 и 1.12). От допущения, что считать полезной и мешающей составляющей наблюдаемых величин, будет зависеть такая важная характеристика геофизических данных, как отношение сигнал/помеха.

Самым существенным моментом представления (1.2) является независимость полезной и мешающей составляющей. Как правило, при построении процедур обработки данных, которые направлены на выделение полезной компоненты, относительно помехи делаются различные предположения, позволяющие отделить ее от целевой составляющей. В то же время очевидно, что для сложных геофизических данных мешающие компоненты могут входить в полезную составляющую как линейным, так и нелинейным образом. Такие модели будут рассмотрены в следующей главе.

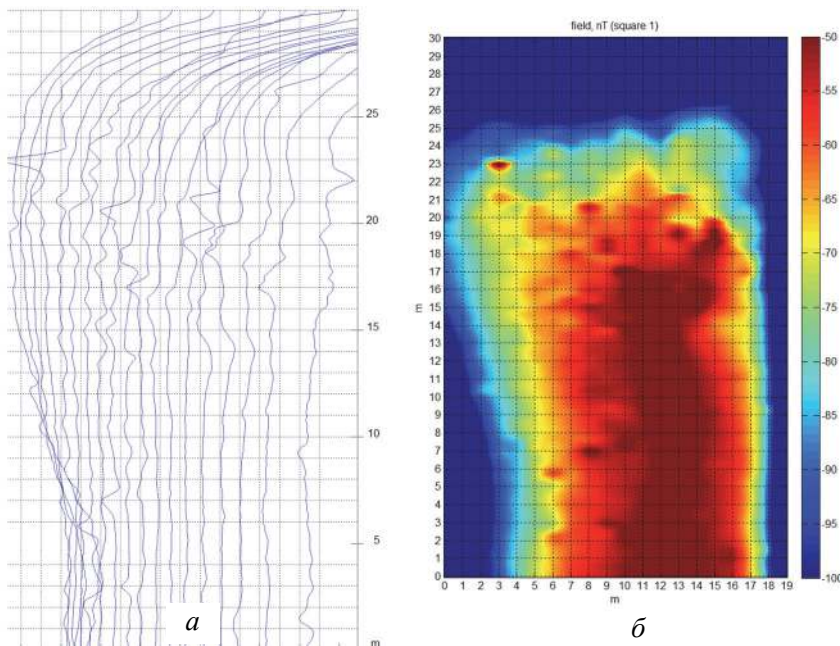


Рис. 1.16. Профильные наблюдения магнитного поля (*а*) и построенная на их основе карта распределения магнитного поля по площади (*б*) (данные предоставлены Л.В. Цибизовым)

Условность выделения указанных компонент, на что указывалось в начале этого раздела, является исключительно важным моментом. В качестве иллюстрации приведем данные магниторазведки, показанные на рис. 1.16. Основной структурный элемент регистрируемого магнитного поля на исследуемой площади был связан с металлическими воротами. Это потребовало устранения соответствующей составляющей, которая по отношению к целевым археологическим объектам являлась мешающей компонентой. В то же время непосредственно при решении задачи ее оценивания с целью устранения она выступала в роли выделяемой, а археологические аномалии по отношению к ней были мешающими. Подобные задачи будут рассматриваться в следующей главе.

Несмотря на простоту и указанную условность, представление (1.2) сыграло значительную роль в развитии процедур обработки и интерпретации геофизических данных. В частности, оно позволило «примирить» два подхода: детерминистический и стохастический при рассмотрении интерпретационных моделей [4]. В последнем случае очень важно понимать и изучать характеристики мешающей компоненты с позиций случайных величин и процессов (приложение 5).

ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

Задания для самостоятельной работы

1. Просмотрите геофизические данные, с которыми вы работаете. Постарайтесь определить их основные особенности.
2. Что является объектом ваших исследований, как его можно описать и какие основные характеристики у него имеются?
3. Постарайтесь ответить на вопрос, с какой целью получались ваши данные и на определение каких параметров (характеристик) целевого объекта они направлены.
4. Сможете ли вы точно охарактеризовать полезную и мешающую компоненту наблюдений, с которыми вам приходится работать, а также указать их соотношение и энергетическое отношение этих двух составляющих?

Примеры контрольных вопросов

1. Объекты геофизических исследований и их особенности.
2. Сущность и особенности получения геофизических данных.

3. Связь геофизических данных со строением среды и проводимым геофизическим экспериментом.
4. Необходимость использования различных геофизических методов исследования.
5. Масштабность, дискретность и объем получаемых геофизических данных.
6. Основные характеристики геофизических данных и их зависимость от методов регистрации.
7. Априорная информация и ее использование при получении и интерпретации геофизических данных.
8. Понятие полезной компоненты (сигнала) и мешающей составляющей (помехи).
9. Основные вероятностные характеристики геофизических данных и статистические способы их оценивания.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ

2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Преобразования наблюдаемых величин присутствуют на всех этапах получения и обработки реальных данных. Поэтому их понимание необходимо для осмысленного восприятия как исходных наблюдений, так и окончательных результатов обработки, которые используются в интерпретационных комплексах. В свою очередь, надобность в использовании различного рода преобразований связана с тем, что реальные геофизические и особенно сейсмические наблюдения представляют собой сложный информационный объект. Их структура и вид определяются различными процессами и факторами, которые формируют получаемые данные. Самым же существенным моментом является то, что мы не обладаем полной информацией обо всех характеристиках, определивших наблюдаемые величины, а исследуемые объекты существенно от нас удалены и неточно определены. Как следствие, появляется необходимость в использовании множества процедур различной направленности и назначения при анализе и интерпретации наблюдений. Они преобразуют исходные геофизические данные и позволяют выявить или устранить в них различные особенности.

Значительная часть используемых процедур направлена на выделение некоторого типа информации, отвечающей определенным моделям, в рамках которых может быть произведена последующая интерпретация полученных данных. Как правило, подобные процедуры существенно упрощают структуру исходных наблюдений, позволяя приблизить их к модельным представлениям об изучаемой среде. Это

естественным образом связано с желанием вложить данные в имеющиеся модельные представления, хотя очевидно, что в таком подходе может скрываться опасность потери полезной информации или ее искажения. Одним из наиболее ярких примеров такого преобразования служит процедура направленного суммирования сейсмических трасс. Она обычно используется для выделения сигналов определенной природы с фактическим уничтожением других типов сигналов.

Применение обрабатывающих процедур с целью упрощения исходных данных, несмотря на все известные недостатки, приводит к наиболее приемлемым для интерпретации результатам. Именно упрощенные геофизические и тем более сейсмические наблюдения используются в дальнейшем при решении практических задач. Таким образом, подобные процедуры, выступающие в роли значительного регуляризирующего элемента, дают возможность решить задачи по определению параметров и характеристик реальных сред.

На рис. 2.1 показан достаточно простой пример использования стандартных преобразований при обработке и интерпретации данных морской сейсморазведки. Основой применяемых в данном случае преобразований является когерентное суммирование наблюдаемых сигналов.

Видно, что структура волнового поля при выполнении морских исследований существенно проще, чем при проведении наземных сейсмических работ (это отмечалось в разд. 1.3). Но даже в этом случае интерпретация наблюдений не является тривиальной задачей, о чем свидетельствует сложный вид функции когерентности, получаемой при анализе спектра скоростей (рис. 2.1, б). (Краткое описание процесса построения такой функции имеется в разд. 1.4.) Выбор определенного скоростного закона по соответствующему спектру (на данном рисунке он отмечен правой сплошной линией) позволяет выделить некоторые типы волн. Выделяемые отраженные монотипные продольные волны, сигналы для которых (рис. 2.1, в) имеют горизонтальные годографы, позволяют в результате суммирования получить образ среды, отвечающий этому типу волн (рис. 2.1, г). Соответствующий временной разрез позволяет получить решение обратной задачи и построить модель толстослойной среды, где мощности слоев существенно превышают длину распространяющейся волны в окрестности расположения скважины на пикете 186 (рис. 2.1, д). Очевидно, что данная модель имеет существенно более простой вид, чем реальная среда. В то же время в ней содержатся основные элементы, которые отвечают выделенному типу волны, а также достаточно важные физические характе-

ристики (скорости распространения продольных волн и коэффициенты их отражения на границах раздела слоев), которые позволяют определять состав пород.

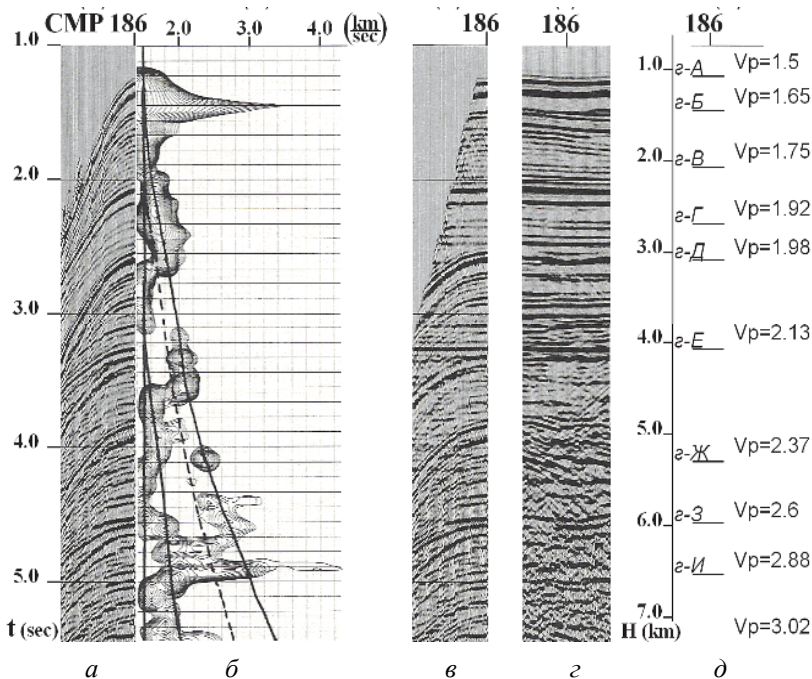


Рис. 2.1. Исходная сейсмограмма ОЦТ (а); соответствующий ей спектр скоростей (б); сейсмограмма после ввода кинематических поправок (в); часть временного разреза МОГТ, полученного для окрестности данной ОЦТ (г); акустическая толстослоистая модель, построенная по результатам обработки для области среды, отвечающей соответствующей точке профиля (д) (пример построен с использованием результатов из книги Yilmaz, 2001)

Приведенный простой пример лишь схематично показывает этапы перехода от исходных данных к параметрам интерпретационной модели среды, которые служат основой для построения геологических моделей и последующих эксплуатационных моделей месторождений. Реальная же обработка часто состоит из нескольких десятков отдельных процедур, включающих различную корректировку исходных дан-

ных, их анализ, определение параметров волн заданного типа. В результате получают некоторые промежуточные образы (рис. 2.1, з), которые служат основой для выделения сигналов, связанных с определенным типом волн, идентифицирующихся в рассматриваемом примере с монотипными отражениями от опорных целевых горизонтов. Последующий анализ этих образов с использованием значений пластовых скоростей, полученных по обработанным исходным сейсмограммам и скважинным данным, позволяет определить структурные и скоростные параметры среды.

2.2. СООТНОШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Очевидным следствием направленного воздействия и регуляризующего эффекта процедур, применяемых при обработке геофизических данных, является необходимость исследования их свойств и характеристик. Это создает условия для их эффективного применения при решении различных задач. Наиболее вероятно, что простота свойств определила широкое применение линейных преобразований при обработке сейсмических материалов, обладающих значительными объемами и высокой сложностью. Свойства линейных преобразований хорошо изучены [1, 3, 7], и в основе их лежат понятия линейных пространств (приложение 2). Как правило, их процедурная реализация на современных компьютерах может быть выполнена с высокой эффективностью, что создает условия быстрого действия процесса обработки данных. Последнее условие особенно важно в связи с теми объемами, которыми обладают современные геофизические и особенно сейсмические наблюдения.

В то же время известные преимущества линейных преобразований *не могут обеспечить всей полноты, необходимой при обработке исходных геофизических данных.* Это связано со многими причинами. Укажем только на некоторые из них.

1. Использование линейных преобразований часто требует упрощенного представления о структуре и свойствах исходных наблюдений. Например, в процедурах направленного суммирования предполагается неизменность формы сейсмического сигнала, наблюдаемого на различных трассах.

2. Эти преобразования являются достаточно примитивным инструментом, создающим условия для решения задач в узких модельных

предположениях. Например, приходится опираться на линеаризованные постановки задач, приводящие к линейным операторным уравнениям, или использовать предположения о том, что наблюдаемые данные представляют собой свертку некоторого сигнала с импульсной характеристикой среды.

3. Часто их применение удлинит решение задачи, сводя его к многошаговым процессам, а на каждом из шагов возникает потребность в упрощении моделей и регуляризации решения задачи. В результате происходит значительная потеря информации. Например, при коррекции только временных статических поправок, без учета изменения формы сигнала, требуется использовать деконволюцию исходных импульсов, чтобы минимизировать изменение формы сигнала, и предполагать, что сейсмические сигналы за счет изменений условий возбуждения и приема могут приобретать только вариации во временных сдвигах.

4. Существенным моментом на практике может оказаться и то, что не всегда удастся построить линейное преобразование, отвечающее рассматриваемой модели или цели, которая должна быть достигнута в процессе использования соответствующей линейной процедуры. Тогда возникает потребность в изменении модели или цели, что может, очевидно, приводить к ухудшению результатов, получаемых по реальным данным. Простым примером может служить использование процедуры группирования сейсмоприемников. Она, несомненно, улучшает качество выделения сигналов, но при этом ухудшается качество их спектральных характеристик, так как при группировании не учитывается изменение формы сигналов, связанных с различными точками приема.

Но самым существенным является то, что линейные преобразования часто не могут принципиально решить поставленную задачу и обеспечивать технологичность обрабатываемых данных. Например, когда ставится задача выделения различных составляющих из наблюдаемого волнового поля, то приходится осуществлять некоторые дополнительные нелинейные преобразования над данными в процессе их обработки. Так, указанное выше направленное суммирование исходных сейсмических трасс, используемое, в частности, для выделения отраженных продольных волн и построения временных разрезов, содержит нелинейное искажение формы сигнала. Это связано с вводом кинематических поправок, спрямляющих годограф отраженных волн, в процессе построения суммотрасс. Одним из отрицательных моментов ввода кинематических поправок будет увеличение периода отрезка

синусоиды. В литературе указанный эффект хорошо изучен и известен как растяжение импульса или «the “stretching effects” of normal-moveout (NMO) correction» [13]. Как результат, получается понижение частоты результирующего сигнала на временном разрезе, который используется затем для определения параметров среды (рис. 2.2). Такое изменение динамических характеристик сигналов может не сильно сказываться на определении структурных и скоростных параметров общей модели среды. Однако оно может быть очень существенным при оценивании локальных характеристик модели среды, к примеру, при оценивании параметров тонкослоистых объектов.

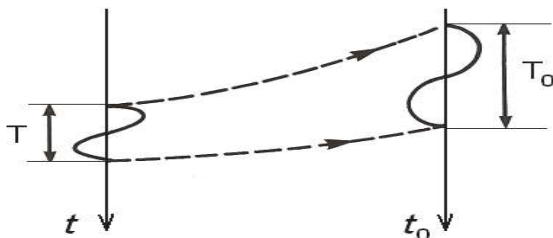


Рис. 2.2. Изменение периода отрезка синусоиды в процессе ввода кинематических поправок при переходе от исходной временной шкалы t к шкале времен t_0

Для уменьшения указанного нелинейного эффекта на практике перед реализацией процедуры суммирования используется деконволюция наблюдаемых сейсмических сигналов, которая уменьшает их длительность. В результате улучшаются геометрические образы макромоделей среды, но происходит потеря информации о динамических особенностях наблюдаемых сигналов. Таким образом, для устранения некоторого нелинейного эффекта используется опять же нелинейное преобразование, приводящее как к положительным, так и к отрицательным результатам.

Указанные причины, а также многие другие являются основой для дальнейшего совершенствования процессов обработки сейсмической информации. Значительный интерес при этом могут представлять исследования, направленные на построение и изучение свойств нелинейных преобразований сейсмических данных. Здесь важно осознать, что нелинейные преобразования могут выступать не только как часть некоторых процедур обработки, дающая дополнительные нежелательные

искажения, но и как самостоятельные процедуры, позволяющие наиболее эффективно решать определенные задачи. Такое возможно, когда данные преобразования строятся исходя из потребностей решаемой задачи и лучше отвечают моделям эксперимента и среды. Тогда удастся достигнуть существенного положительного эффекта при их использовании.

Хорошо известно, что любые нелинейные преобразования обладают как преимуществами, так и недостатками по сравнению с линейными преобразованиями. Свойства различных нелинейных преобразований, а также их сопоставление с соответствующими линейными преобразованиями приведены в различных учебниках и книгах (в частности, в [8]).

Главное преимущество нелинейных преобразований – их исключительно высокая эффективность при правильном использовании. Часто только нелинейное преобразование позволяет получить решение поставленной задачи. Поэтому для данных преобразований особенно актуально отмеченное выше целенаправленное или квалифицированное применение построенных на их основе процедур. Именно в этом случае достигаются наиболее эффективные результаты работы таких процедур.

Одним из существенных недостатков нелинейных преобразований является сильная зависимость их результатов от уровня нерегулярных или модельных помех, присутствующих в наблюдениях. Это приводит, как правило, к высокой нестабильности результатов, получаемых на основе применения соответствующих процедур на практике при работе с реальными данными. Вследствие этого появляется необходимость детального исследования свойств нелинейных преобразований при различном уровне помех и определении критических пороговых значений для каждого из рассматриваемых преобразований.

Еще одним важным моментом, который может являться как положительным, так и отрицательным при использовании процедур, основанных на нелинейных преобразованиях, будет их высокая направленность на решение конкретной задачи. Как результат, получаем, что их применение для сейсмических материалов, которые соответствуют заложенным в процедуры предположениям, обеспечивает высокую эффективность решения поставленной задачи. Напротив, использование этих процедур при нарушении соответствующих предположений приводит к существенным ошибкам в получаемых решениях. Поэтому важным является учет ограничений и предположений, которые были

использованы при построении соответствующих процедур. Элементарным примером может служить автоматическая регулировка амплитуд. Использование этой нелинейной процедуры может давать как положительный, так и отрицательный эффект. С ее помощью мы можем усилить сигналы, амплитуда которых мала на больших удалениях в связи с большим расхождением фронта распространяющейся волны. Однако одновременно она может усилить фон помех и исказить форму анализируемого сигнала.

Указанные особенности нелинейных преобразований делают актуальными и существенными для их практической реализации научные исследования по изучению свойств как самих преобразований, так и построенных на их основе процедур.

Еще одним интересным и важным аспектом представляется развитие совмещенных преобразований, включающих в себя линейные и нелинейные элементы. В этом случае примером может служить совмещение линейного преобразования Фурье, которое является основой классического спектрального анализа, с нелинейными элементами в виде «временных окон», что существенно улучшает качество спектральных оценок коротких сигналов, и операцией логарифмирования спектров, применяемой при поверхностно-согласованной деконволюции (см. разд. 2.7).

2.3. РЕДУКЦИЯ

Редукция – это простейший способ преобразования геофизических данных; она может носить линейный или нелинейный характер, она также включает в себя понятие априорной модели и знания о ее структуре и параметрах. Именно последнее позволяет полностью учесть или устранить составляющие, связанные с априорной моделью из наблюдаемых данных. Это бывает полезно во многих случаях, например, при устранении региональных составляющих с целью наиболее точного определения локальных аномалий, относящихся к мелкоструктурным объектам среды, аналогично рис. 1.3 (см. разд. 1.2).

Возможно, одни из первых редукций наблюдаемых данных к некоторому общему уровню, обеспечивающему возможность их сопоставления, были выполнены в области гравиметрических измерений. В 1749 году французский исследователь П. Буге опубликовал работу, где приводил зависимости силы тяжести от высоты над уровнем мирового океана и предлагал использовать некоторую поправку, учитывающую эту зависимость. В память об этом исследователе в настоящее

время в гравиметрии имеется поправка, или редукция Буге. Но сама идея таких поправок развивалась достаточно длительное время на протяжении XVIII и XIX веков [11]. Сейчас с их помощью могут быть учтены достаточно существенные изменения силы тяжести, в частности такие, как несовпадение формы Земли (геоида) с шаром или влияние притяжения атмосферы.

В качестве примера приведем две из существующих поправок. Они относятся к изменению величины силы тяжести в зависимости от расположения точки наблюдения на поверхности Земли и связаны с вертикальным градиентом этой силы.

Первая поправка определяется в свободном воздухе и в отечественной литературе часто носит название поправки Фая (сокращение от английского «free air»). Она использует линейную зависимость силы тяжести от высоты H (рис. 2.3) и вычисляется как

$$\Delta g_{\text{Фая}} = g - (\gamma_0 - 0,3086H), \quad (2.1)$$

где g – измеренная вертикальная составляющая силы тяжести в точке P на поверхности Земли; γ_0 – нормальная сила тяжести для эллипсоида, аппроксимирующего поверхность Земли на уровне мирового океана, с учетом угловой скорости суточного вращения и постоянной приливной деформации. Редуцированные таким образом аномалии значения силы тяжести считаются заданными на поверхности геоида и входят в мировые базы гравиметрических данных.

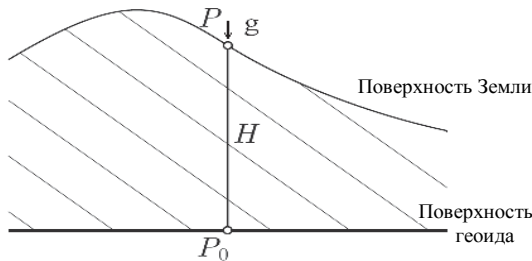


Рис. 2.3. К определению поправки Фая при определении вертикального градиента силы тяжести

Вторая поправка, называемая редукцией Буге, определяется с использованием значений, полученных на основе поправки Фая. Соответствующая редукция может быть представлена выражением

$$\Delta g_{\text{Буге}} = \Delta g_{\text{Фая}} - 42\rho h, \quad (2.2)$$

где ρ – средняя плотность пород, слагающих плоскопараллельный слой (иногда называемый пластиной Буге) мощностью h (рис. 2.4). Часто при расчетах в качестве соответствующих плотностей выбираются осредненные значения ρ для изучаемого региона. Это связано с тем, что основной вклад в гравиметрическое поле согласно закону притяжения вносят плотности ближних масс. Очевидно, что редукция Буге позволяет точнее, чем редукция Фая, выделять аномалии, связанные с локальным изменением плотностных характеристик Земли.

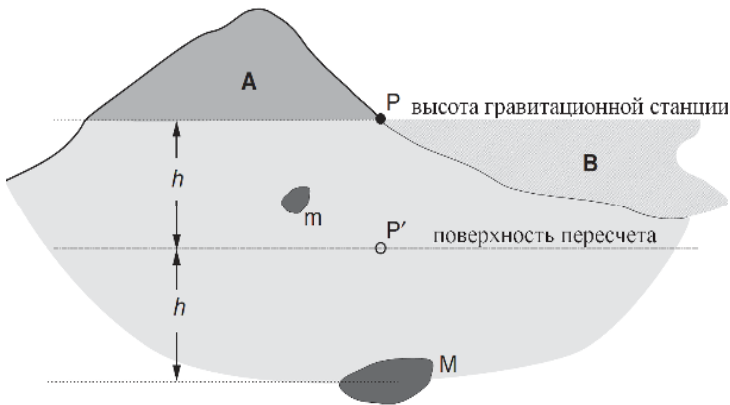


Рис. 2.4. К редукции Буге

Приведенные редукции являются не только примером некоторых корректировок получаемых гравиметрических наблюдений, но и дают общую идею преобразования исходных геофизических данных с целью повышения детальности исследования. Идея заключается в том, чтобы максимально использовать имеющуюся априорную информацию о глобальной структуре объекта (в рассмотренных случаях это форма и осредненная плотность Земли) для улучшения определения его локальных характеристик. Одновременно здесь же присутствует и элемент калибровки реальных данных по отношению к условиям наблюдения (в частности, к высоте).

Подобные преобразования достаточно широко распространены при обработке реальных данных в различных областях геофизических исследований. Так, при обработке сейсмических наблюдений, получен-

ных методом глубинных сейсмических зондирований (ГСЗ), выполняется редукция скорости 6 км/с, отвечающая средним значениям скорости распространения продольных колебаний в нижней части земной коры (пример дан на рис. 2.8). Важным элементом является и калибровка сейсмических данных, в частности, позволяющая учитывать неоднородность условий возбуждения и приема (см. разд. 1.4).

2.4. СПОСОБЫ МНОГОМЕРНОГО НАПРАВЛЕННОГО СУММИРОВАНИЯ

Эти способы представляют собой одни из простейших линейных преобразований геофизических данных и наиболее распространены в сейсморазведке. Их появление связано с развитием радиотехнических и радиолокационных систем, а в основе лежит теория интерференционных систем, используемая при выделении сигналов на фоне случайных помех [1, 4]. Одним из существенных моментов, влияющих на эффективность и качество работы таких преобразований на практике, является неизвестная форма выделяемых сигналов и ее значимые изменения. Такого рода изменения могут быть вызваны удаленностью исследуемого объекта от точки наблюдения и непрозрачностью сложнопостроенной среды, в которую помещен объект (см. разд. 1.3).

Непрозрачность среды не позволяет нам учитывать или контролировать все изменения выделяемого сигнала, который считается полезной компонентой анализируемых данных (см. разд. 1.5). Обозначим этот сигнал $f^w(p_j, t)$ и будем считать, что он присутствует в наблюдении, расположенном в заданной точке p_j со значениями пространственных координат (x_j, y_j, z_j) и временной переменной t . Здесь j обозначает номер наблюдения с возможным его изменением от 1 до N .

Тогда представление (1.2) принимает вид достаточно общей модели, используемой в теории интерференционных систем при рассмотрении вопросов выделения сигналов [1]:

$$y(p_j, t) = f^w(p_j, t) + \xi(p_j, t), \quad (2.3)$$

где $y(p_j, t)$ представляет собой регистрируемую величину или наблюдение, а $\xi(p_j, t)$ считается некоторой аддитивной составляющей, присутствующей в наблюдении совместно с выделяемым сигналом.

В случае сейсмических данных сигнал обладает локальностью по времени, поэтому и отношение сигнал/помеха будет зависеть от временной переменной t . Такая зависимость создает благоприятные условия для выделения целевой компоненты.

Обычным для теории интерференционных систем считается предположение о том, что $\xi(p_j, t)$ – некоторая реализация случайного процесса (см. приложение 5). Верхний индекс сигнала определяет его тип. При этом часто предполагается, что зависимость $f^w(p_j, t)$ от p_j определяется известными законами. Так, для сейсмических сигналов эти зависимости определены годографами соответствующих волн [3, 9], которые в дальнейшем будем обозначать τ и считать, что значение годографа определяется как $\tau_j = \tau(p_j | \vartheta)$, где ϑ – некоторый параметр.

Само же воздействие интерференционной системы, направленной на выделение или оценку сигнала $f^w(p_j, t)$, определяется выражением

$$\hat{f}^w(t) = \sum_{j=1}^N h_j y(p_j, t - \Delta t_j), \quad (2.4)$$

очевидно, что оно будет линейным преобразованием по отношению к наблюдениям. Здесь h_j являются заданными весовыми множителями, связанными с определенными свойствами фиксированного наблюдения, например чувствительности приемника, а Δt_j – определенный временной сдвиг, обеспечивающий синхронизацию различных сигналов.

Свойства сигнала $\hat{f}^w(t)$, получаемого на основе выражения (2.4), особенно просто анализируются, когда выделяемый сигнал $f^w(p_j, t)$ сохраняет свою форму в различных наблюдениях и отличается только временным сдвигом τ_j , т. е. $f^w(p_j, t) = f^w(t + \tau_j)$. Тогда, используя свойства преобразования Фурье [7], несложно показать, что спектр выделенного сигнала $\hat{f}^w(t)$ представим произведением двух спектральных характеристик, получаемых посредством следующих равенств:

$$\hat{F}^w(\omega) = F^w(\omega) \sum_{j=1}^N h_j e^{-i\omega\delta_j} = F^w(\omega) H(\omega), \quad (2.5)$$

где $F^w(\omega)$ – спектр сигнала $f^w(t)$, а $H(\omega)$ – спектр воздействия, которое интерференционная система оказывает на выделяемый сигнал. При этом вид $H(\omega)$ существенно зависит от величины $\delta_j = \Delta t_j - \tau_j$, которая определяет разницу между временами, используемыми в интерференционной системе, и временами расположения выделяемых сигналов в наблюдениях. Спектр $H(\omega)$ называют характеристикой направленности интерференционной системы. При совпадении Δt_j с τ_j , часто называемым синфазным суммированием, функция $H(\omega)$ уже не зависит от частоты и определяет максимальное значение $\hat{F}^w(\omega)$ и энергии выделяемого сигнала $\hat{f}^w(t)$.

На рис. 2.5 показан пример выделения целевого сейсмического сигнала по данным морской сейсморазведки. На исходных наблюдениях видно, насколько сильно может изменяться форма сигнала под воздействием помех. На рис. 2.5 также демонстрируется, что при достаточно точном определении величины δ_j получаемая оценка сигнала обладает высоким качеством.

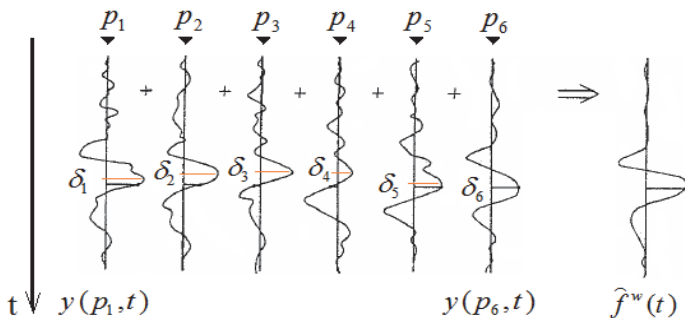


Рис. 2.5. Пример выделения сигнала с помощью интерференционной системы, использующей шесть наблюдений (пример построен по результатам книги Хаттон и др., 1989)

Следует отметить, что процедуры интерференционного приема были широко распространены до использования компьютеров. Они часто применялись при группировании сейсмоприемников для повышения качества исходных сейсмических данных, которые в диалоговом виде

применялись для построения модели среды и определения ее характеристик, т. е. интерпретации. В то же время именно появление ЭВМ и развитие математических аспектов обработки данных способствовали существенному развитию этого подхода и появлению новых методов анализа и обработки, в частности регулируемого направленного приема (РНП), τ - p -преобразования и f - k -фильтрации [1, 5, 12].

2.5. РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Линейные регрессионные модели. Они связаны с одномерными или многомерными регрессионными функциями, которые часто возникают при обработке геофизических данных. Такие функции могут представлять собой региональное поведение измеряемых величин (см. разд. 1.1) или определять некоторые трендовые (главные, выраженные) составляющие. Подобные составляющие указывают на главные закономерности строящихся моделей и служат основой для линеаризации модели при оценивании целевых параметров локальных объектов среды. Различного типа регрессионные модели, а также их приложения в геофизических, геохимических и петрофизических исследованиях подробно рассмотрены в учебниках [3, 4].

Регрессионные функции могут иметь линейную или нелинейную структуру и характеризоваться значительным числом параметров. Существенным моментом является то, что часто их зависимость от неизвестных (определяемых) параметров носит линейный характер. В этих случаях соответствующая функция или модель представима линейной комбинацией неизвестных параметров, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_p | \theta_1, \dots, \theta_p) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_p x_p, \quad (2.6)$$

где $\{\theta_k\}$ – значения неизвестных параметров; $\{x_k\}$ – заданные переменные величины, где k задает номер соответствующей величины. Последние могут быть как отдельными, так и представлять собой известные функциональные зависимости от этих переменных, к примеру, степенные. Таким образом, приведенное выражение отвечает достаточно большому числу функций, обладающих линейным и нелинейным характером. В частности, одномерные или многомерные полиномы имеют аналогичный вид. Так, для случая двух пространственных

координат x и z при использовании полинома второй степени приходим к следующей записи:

$$f(x_1, \dots, x_p | \theta_1, \dots, \theta_p) = \theta_1 \cdot 1 + \theta_2 x + \theta_3 z + \theta_4 xz + \theta_5 x^2 + \theta_6 z^2,$$

где имеется шесть неизвестных значений параметров $\{\theta_k; k=1, \dots, 6\}$, а величины $\{x_k\}$ соответственно представляются как $x_1=1, x_2=x, x_3=z, \dots$ Пример подобной функции, представляющей поведение региональной составляющей силы тяжести Δg , показан на рис. 2.6.

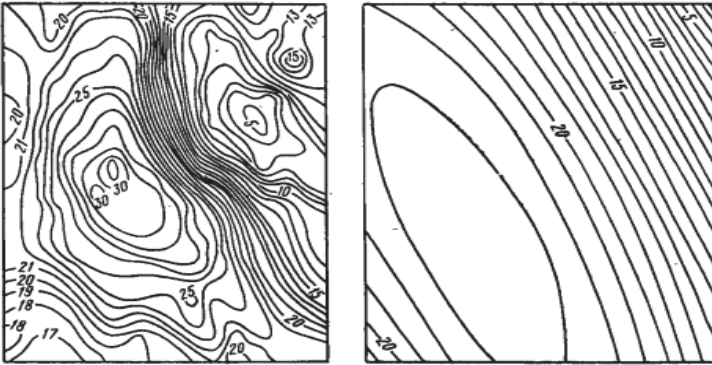


Рис. 2.6. Слева наблюдаемые значения Δg , а справа определенная по ним региональная составляющая (из книги Никитина)

Смысл введения регрессионных моделей заключается в том, что мы предполагаем или знаем характер изменения наблюдаемой величины y , но нам требуется точно определить эти изменения по результатам выполненных экспериментов. При этом результаты экспериментов могут иметь ошибки (помехи), которые определяют отличие значения регрессионной функции от наблюдаемой величины при соответствующих значениях переменных, т. е.

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_{1i}, \dots, x_{pi} | \theta_1, \dots, \theta_p) + \varepsilon_i = \\ &= \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_p x_{pi} + \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где y_i – полученное в эксперименте значение наблюдаемой величины, а $\{x_{ki}\}$ представляют собой значения переменных, отвечающие дан-

ному эксперименту. Тогда величина $\{\varepsilon_i\}$ задает отличие значений регрессионной функции от y_i . Такие отличия могут интерпретироваться как помеха, присутствующая в эксперименте и носящая достаточно произвольный характер, который представим случайными величинами [3, 4, 10].

Очевидно, что линейная регрессионная модель (2.7) является частным случаем представления (1.2) и, как указывалось в разд. 1.5, понятие полезной и мешающей составляющих является условным. Поэтому регрессионная функция (2.6) может быть использована для описания и выделения мешающей компоненты. Так, в случае магнитных данных, представленных на рис. 1.16, ее применение позволяет устранить влияние металлических ворот, выделив магнитные аномалии, относящиеся к археологическим объектам, как показано на рис. 2.7.

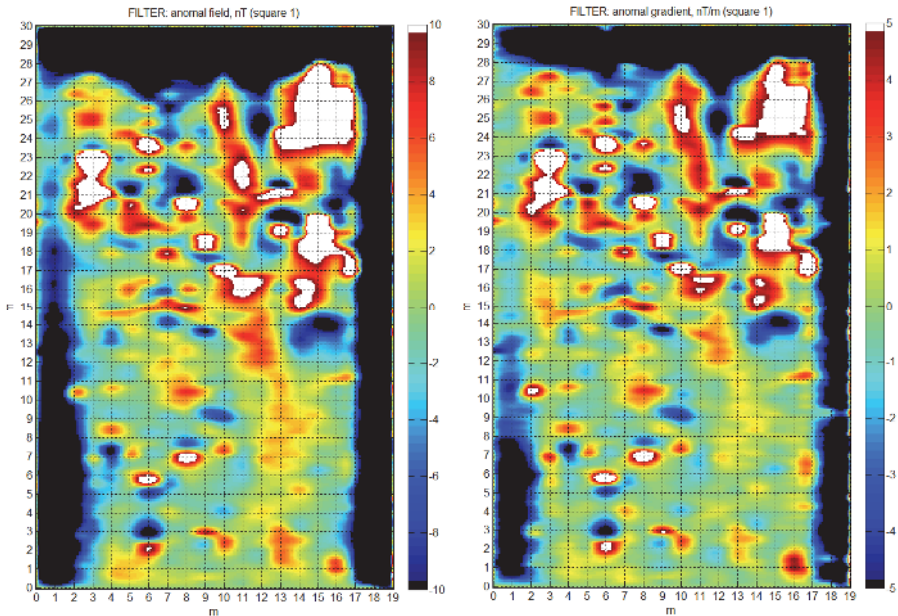


Рис. 2.7. Выделение магнитных аномалий с использованием линейных регрессионных моделей; слева выделенные локальные аномалии, справа – аномалии градиента магнитного поля (результаты Л.В. Цибизова)

При создании алгоритмов обработки геофизических данных в рамках линейных регрессионных моделей целесообразно воспользоваться математическими инструментами линейных пространств (приложение 2). Для этого будем полагать, что для геофизических наблюдений определена линейная регрессионная модель в форме (2.7), а также что имеются результаты N выполненных геофизических экспериментов. Тогда, учитывая современные средства представления, хранения и обработки информации, можно считать, что данные и параметры регрессионной модели представляются конечными наборами чисел, т. е. имеют форму векторов (см. приложение 2).

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_P x_{Pi} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

которые можно записать в форме векторных уравнений:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_N\}^T$ – вектор, состоящий из значений наблюдаемой величины, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_P\}^T$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}^T$ – векторы значений параметров модели, которые требуется определить, и помехи соответственно. Матрица \mathbf{A} состоит из значений переменных x_{ki} , отвечающих всем выполненным экспериментам, и имеет размерность $(N \times P)$, т. е. в ней N строк по числу уравнений или наблюдений и P столбцов по числу неизвестных параметров. Для реальных геофизических наблюдений и решаемых на их основе задач величины N и P могут равняться сотням тысяч и миллионам, что представляет собой отдельную проблему при нахождении решения задачи.

Заметим, что в реальном эксперименте, до того момента пока значения параметров $\boldsymbol{\theta}$ не определены, неизвестными являются и величины $\boldsymbol{\varepsilon}$, поэтому они могут быть перенесены в левую часть уравнения и включены в вектор наблюдений.

Кроме указанных выше размерностей, важной характеристикой матрицы \mathbf{A} (или линейного оператора) является величина ее ранга: $r = \text{rang}(\mathbf{A})$, т. е. минимального числа линейно-независимых строк и столбцов соответствующей матрицы. Уже соотношения трех приведенных параметров (N, K, r) позволяют дать некоторую характеристи-

ку построенной системы уравнений (2.8) и ее решений (см. приложение 4).

Линейная форма регрессионной модели (2.7) в виде (2.8) дает возможность использовать хорошо развитый аппарат линейной алгебры для построения решения задачи, которое состоит в определении значений вектора неизвестных параметров θ [6]. Согласно современным позициям такое решение может быть представлено некоторым линейным оператором, который реализуется в матричной форме, т. е.

$$\hat{\theta} = \mathbf{H} \mathbf{y}, \quad (2.9)$$

где вектор $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p\}^T$ служит обобщенным решением задачи и представляет собой линейную комбинацию наблюдаемых экспериментальных значений, а \mathbf{H} – некоторая матрица, определяющая соответствующее решение и его свойства. Матрица (или оператор) \mathbf{H} может быть определена как на основе некоторых эвристических соображений, так и путем формальных построений.

Очевидно, что если построенное по форме (2.9) решение $\hat{\theta}$ совпадает с единственным решением задачи, то $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}$. В то же время оно может быть определено и для произвольной прямоугольной матрицы \mathbf{A} , для которой не существует классической обратной матрицы.

Одним из способов построения такой матрицы \mathbf{H} является сингулярное разложение матрицы \mathbf{A} . В этом случае имеем следующее представление:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{D}^T, \quad (2.10)$$

где входящие в данное произведение матрицы по определению (или по построению) обладают следующими свойствами: \mathbf{S} , \mathbf{D} – ортогональные матрицы размерности $(N \times r)$ и $(P \times r)$ соответственно, а $\mathbf{V} = \{v_i \neq 0; i = 1, \dots, r\}$ – диагональная матрица с элементами v_i , которые называются сингулярными числами. Здесь r является рангом матрицы \mathbf{A} . Поэтому $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_r$ и $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}_r$, где \mathbf{I}_r – единичная матрица размерности r .

Представление (2.10) для матрицы \mathbf{A} еще называется SVD-разложением. Оно позволяет построить обобщенную обратную (псевдообратную) матрицу в форме

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{S}^T, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{V}^{-1} = \{v_i^{-1}; i = 1, \dots, r\}$.

Не будем подробно останавливаться на свойствах решения и матрицы \mathbf{H} , построенных на основе SVD-разложения. Некоторые из этих вопросов рассмотрены в приложении 4. Отметим только, что для достаточно типичной ситуации, когда количество наблюдаемых значений в векторе \mathbf{y} превышает число неизвестных значений вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$, соответствующее решение будет совпадать с решением, получаемым по методу наименьших квадратов (м.н.к). Как известно [4], решение м.н.к отвечает системе линейных уравнений $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$ и обеспечивает минимальную норму отклонения построенной модельной составляющей (в нашем случае регрессионной функции) от наблюдаемых значений. В случае невырожденной матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ оно представимо в виде

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}. \quad (2.12)$$

С общей моделью (2.7) также связаны понятия дисперсионного и ковариационного анализа [3, 4].

*Общие характеристики качества оценок
для линейных регрессионных моделей*

Учитывая возможный произвол в построении решений на основе многомерных регрессионных моделей, который заключен в выражении (2.9), нам требуются критерии, позволяющие проводить сравнения различных решений. Вопросам построения таких критериев посвящено значительное число работ, относящихся к вычислительной математике и математической статистике. У нас нет возможности для детального рассмотрения этих вопросов. Поэтому приведем только три возможные характеристики качества решения, которые достаточно удобно использовать в случае линейных моделей.

Итак, если у нас имеется некоторое решение, заданное линейным оператором (матрицей) \mathbf{H} , то независимо от способа построения этого оператора укажем следующие характеристики качества построенного решения. Они могут быть просто определены и проанализированы,

после того, как решение будет получено. К ним относятся следующие характеристики.

1. *Точность аппроксимации исходных наблюдений.* Эта характеристика получается через построение оценок наблюдений и сопоставление их с исходными данными, т. е. в начале по $\hat{\theta}$ определяем $\hat{y} = A\hat{\theta} = ANy$, а затем находим значения вектора разности:

$$y - \hat{y} = (I_N - AN)y = \varepsilon_y \in Y^N.$$

Здесь I_N – единичная матрица размерности $(N \times N)$. При этом чем меньше величина вектора ε_y , тем лучше получаемое решение по данному критерию. Последнее равенство также подсказывает нам, как можно характеризовать качество получаемого решения на уровне оператора N . Оно определяется близостью матрицы AN к единичной.

2. *Точность восстановления параметров модели.* Она определяется через гипотетическую подстановку исходного уравнения (2.8) в полученное решение (2.9). В результате имеем $\hat{\theta} = NA\theta$. Далее, сравнивая истинное и полученное значение вектора параметров, находим значения вектора разности:

$$\theta - \hat{\theta} = (I_K - NA)\theta = \varepsilon_\theta \in M^K.$$

Хотя величина вектора ε_θ позволяет нам полностью охарактеризовать построенное решение, ее, как правило, можно определить в случае модельных данных и нельзя вычислить в реальном эксперименте. Поэтому здесь особую важность начинает играть характеристика качества получаемого решения на уровне оператора N . Видно, что в данном случае она определяется близостью NA к единичной матрице.

В статистическом смысле обе приведенные характеристики качества построенного решения отвечают понятию смещения оценки. Как известно, еще одной важной статистической характеристикой может являться дисперсия построенного решения, которая определяется соответствующей матрицей ковариаций.

3. *Матрица ковариаций параметров модели.* Она определяется матрицей ковариаций исходных наблюдений и матрицей N , что несложно получить на основе равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta &= \left\{ \text{cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j); i=1, \dots, K; j=1, \dots, K \right\} = \\ &= E \left\{ (\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \right\} = E \left\{ \mathbf{H}\mathbf{y} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{y})^T \right\} = \mathbf{H} E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T) \mathbf{H}^T. \end{aligned}$$

При их построении используется предположение о равенстве нулю математического ожидания исходных наблюдений, т. е. $E\{\mathbf{y}\} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – вектор, состоящий из нулей. Последнее приводит к равенству нулю математического ожидания построенного решения, так как $E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\} = \mathbf{H} E\{\mathbf{y}\} = \mathbf{0}$.

Воспользовавшись тем, что $E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T) = \mathbf{R}_y$ – матрица ковариаций имеющихся наблюдений (приложение 5), окончательно получаем

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{H} \mathbf{R}_y \mathbf{H}^T.$$

Таким образом, если нам известна матрица \mathbf{R}_y , то для любого оператора \mathbf{H} могут быть определены значения матрицы \mathbf{R}_θ , характеризующие среднеквадратичный разброс и связь получаемых оценок параметров.

2.6. РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ГОДОГРАФОВ ВОЛН

Кроме использования при обработке потенциальных геофизических полей, регрессионные модели нашли достаточно большое применение при обработке и интерпретации сейсмических данных. Одними из главных являлись задачи, связанные с аппроксимацией времен прихода различных типов волн (годографов волн), структурных и физических параметров модели среды (границ, скоростей, плотностей). Большое применение получили задачи установления регрессионных или корреляционных связей как между отдельными сейсмическими параметрами, так и между прогнозными характеристиками среды (пористость, проницаемость и пр.).

Для примера рассмотрим задачи аппроксимации годографов волн. Простейшими из них будут годографы прямой и головной волны. Они наблюдаются в первых вступлениях сейсмических сигналов, и на их основе были построены и строятся до настоящего времени многие региональные модели земной коры.

На рис. 2.8 в рамках модельного эксперимента показаны времена прихода прямой волны (обозначены красным цветом и цифрой 1), а также двух головных волн (обозначены синим цветом и цифрой 2), которые связаны с подстилающими границами двух слоев модели среды. Видно, что годографы близки к прямым линияям.

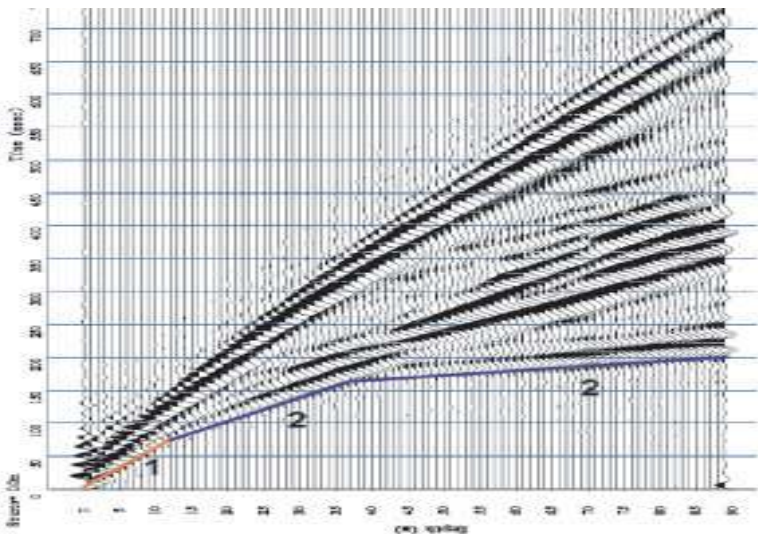


Рис. 2.8. Модельная сейсмограмма, построенная для модели двух-слойной среды (пример взят из Интернета)

Для реальных сейсмограмм волновая картина имеет более сложный вид, но в ней также при определенных условиях залегания пластов формируются хорошо выраженные головные волны. Так, на рис. 2.9 показана сейсмограмма (в редукции скорости 6 км/с), на которой отчетливо прослеживаются сигналы, относящиеся к волне P_{12} , обладающей квазипрямолинейным годографом. Волна идентифицируется как продольная обменная, распространяющаяся в водном и осадочном слоях вдоль поверхности кристаллического фундамента с граничной скоростью 6 км/с.

Линейность годографа головной волны получается из рассмотренной простейшей модели среды, содержащей один толстый слой в нижнем полупространстве. При этом слой обладает двумя плоскими границами с горизонтальной верхней границей и наклонной нижней

границей с углом наклона φ и граничной скоростью V_h (рис. 2.10). Глубина погружения границы по нормали в начале координат равна H , а скорость в верхнем слое – V_0 . Таким образом, рассматриваемая модель полностью определяется четырьмя параметрами: V_0 , H , V_h , φ .

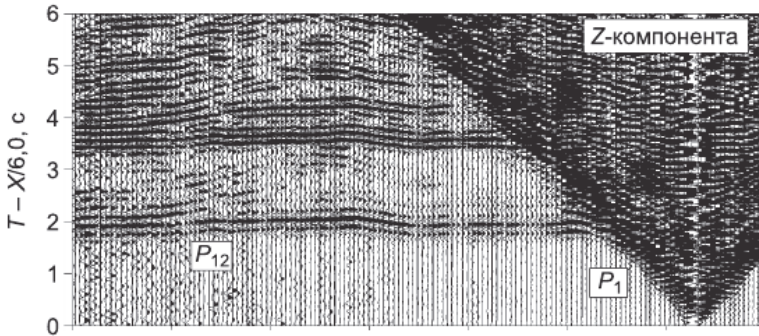


Рис. 2.9. Реальная сейсмограмма, полученная методом ГСЗ в Охотском море (рисунок подготовлен по результатам работы ФГУП «ВСЕГЕИ»)

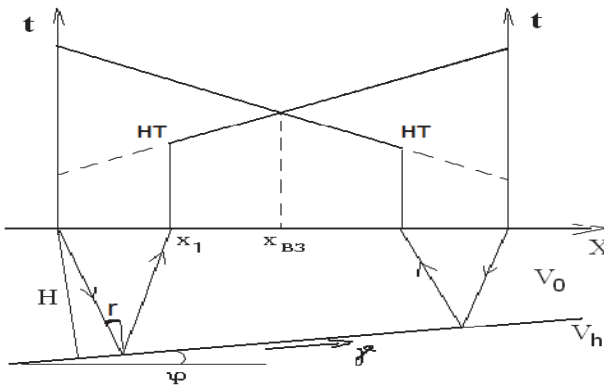


Рис. 2.10. К построению годографа головной волны

Часто в реальном эксперименте за счет перемещения источника наблюдаются значения прямого t_i^a и обратного t_i^b годографов преломленных волн в фиксированных точках профиля с координатами

$x_i, i=1, \dots, N$. Известно [9], что в рамках рассматриваемой модели среды и при отсутствии мешающих факторов каждый из годографов, являющийся решением соответствующей прямой задачи, может быть представлен выражением

$$t_i = t(x_i) = \frac{\cos \varphi}{V_h} x_i + \frac{2H}{V_0} \cos r = \frac{\cos \varphi}{V_h} x_i + \frac{2H}{V_0} \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V_h^2}}, \quad (2.13)$$

где $\sin r = V_0/V_h$ определяет условие формирования головной волны. Вид приведенного выражения указывает на линейный характер годографа в зависимости от x . Поэтому можно записать следующие равенства для каждого из полученных годографов:

$$\begin{aligned} t^a(x_i) &= t_i^a = c_0^a + c_1^a x_i, \\ t^b(x_i) &= t_i^b = c_0^b + c_1^b x_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Очевидно, что в реальном эксперименте в наблюдаемых временах прихода головных волн содержится случайная вариация ξ_i , которая приводит к следующей линейной модели для годографов системы (2.14):

$$t_i = c_0 + c_1 x_i + \xi_i. \quad (2.15)$$

Построенная регрессионная модель (2.15) может быть использована при обработке годографов головных волн. При этом полученные на ее основе значения коэффициентов c_0, c_1 согласно выражению (2.13) дают возможность рассмотреть задачу определения значений геофизических параметров среды в рамках заданной интерпретационной модели толстого слоя с наклонной нижней границей.

Несколько более сложный вид имеет годограф отраженной волны (рис. 2.11). Для однослойной модели среды он представляет собой гиперболу [9], которая в случае наклонной нижней границы среды имеет вид

$$t(x) = \frac{1}{V_0} \sqrt{4h_0^2 + x^2 + 4h_0 x \sin \varphi_x}, \quad (2.16)$$

где φ_x – кажущийся угол наклона (падения) нижней границы в плоскости лучей для данной волны.

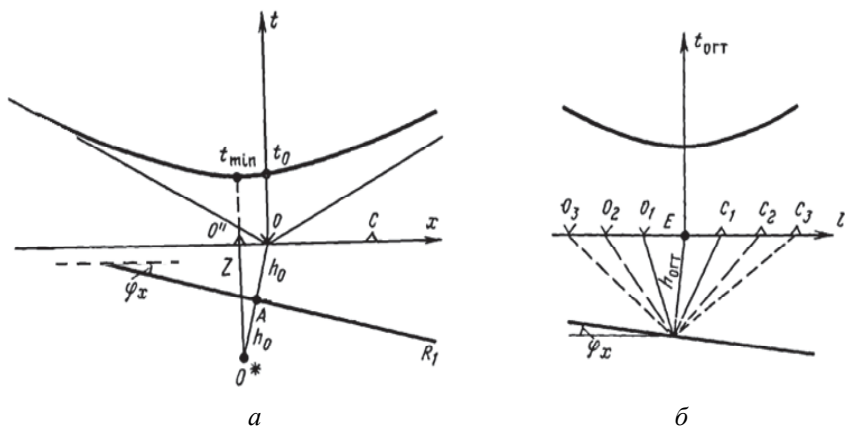


Рис. 2.11. Годографы отраженной волны от наклонной границы при изменении только положения приемника (а) и при изменении положения источник–приемник относительно общей центральной точки (б)

В выражении (2.16), как в предыдущем примере, V_0 определяет скорость распространения волны в верхнем слое, а h_0 – расстояние по нормали от начала координат до линии границы (рис. 2.11, а). Соответствующая гипербола будет симметрична относительно вертикальной прямой, выходящей из точки O^* (см. рис. 2.11, а), и для этого значения x годограф будет иметь минимальное время. В то же время истинный источник расположен в точке O .

Представление для годографа отраженной волны можно переписать при рассмотрении времен ее прихода для системы наблюдений с изменяющимся положением источника и приемника относительно некоторой общей центральной точки E (рис. 2.11, б). В этом случае его вид будет [9]

$$t(x_E, l) = \frac{1}{V_0} \sqrt{4h_{0ГТ}^2 + l^2 \cos^2 \varphi_x}, \quad (2.17)$$

где x_E задает положение точки E на профиле наблюдений, l определяет расстояние между источником и приемником, а $h_{0ГТ}$ – глубина до границы по нормали из точки E .

Кроме обеспечения симметричности годографа для монотипных волн, в преобразованном выражении было скрыто достаточно много

других преимуществ. Например, уменьшалось число параметров, которые необходимо было определять при описании годографа волны, также уменьшалась область освещения анализируемой границы для достаточно сложно построенных сред, что способствовало фокусировке распространяющейся сейсмической энергии и получению более четких (ярко выраженных) отражений от целевых объектов. Важным было и то, что такое преобразование просто получалось на уровне алгоритмов обработки при использовании многократных систем наблюдений.

Еще один существенный момент выражений (2.16) и (2.17) состоял в их линеаризации, которая может быть выполнена либо с использованием разложений тейлоровского типа, либо посредством перехода к квадратам наблюдаемых времен прихода.

2.7. КЛАССИЧЕСКИЙ И СОВРЕМЕННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Такой тип анализа давно и широко применяется при изучении различных геофизических данных, включая и сейсмические наблюдения. Это связано с периодическими структурами или процессами, которые часто проявляются в реальных геофизических измерениях, что особенно характерно для сейсмических измерений (см. разд. 1.3). Поэтому спектральный анализ здесь наиболее широко распространен. Он присутствует как на начальных этапах получения сейсмических записей, так и при выполнении различных шагов обработки и интерпретации полученной информации. На его основе делаются выводы о многих характеристиках как исходных данных, так и результатов их обработки. Результаты такого анализа служат основой для проведения различного рода фильтраций (режекторной, корректирующей, обратной и т. п.). С его помощью просто определяются энергетически выраженные частоты, присутствующие в анализируемых данных, что обеспечивает понимание различных воздействий, формирующих получаемые наблюдения. Одним из простейших примеров является использование спектрального анализа для выявления 50 Гц наводки в исходной сейсмической записи, связанной с линиями электропередач.

Вопросам классического спектрального анализа и его использования в геофизических исследованиях посвящено значительное количество книг и отдельных работ, например [7]. В ней достаточно подробно изложены его основы и прикладные аспекты. В приложении 3 дано

представление о преобразовании Фурье, составляющем основу классического спектрального анализа, как разложения функции по базисным векторам тригонометрических функций. Такое представление сокращает и упрощает введение в соответствующие разделы вычислительной математики.

Фактически на этом можно закончить рассмотрение классического преобразования Фурье и его свойств. Хотя еще остается очень много важных деталей, например, влияние апертюры, дискретности и окон сглаживания. Мы будем обращаться к ним в прикладных вопросах при рассмотрении спектральной декомпозиции отдельных сигналов и их последовательностей. Здесь для иллюстрации приведем только один пример, показанный на рис. 2.12. Он демонстрирует, насколько существенными могут быть потери информации в спектральной области при излишнем закруглении шага дискретизации, на что указывалось в разд. 1.3. Однако в данном случае эффект является не столь очевидным для временного представления, где сохраняются все основные структурные особенности волновой картины. Таким образом, имеющиеся потери относились к мелкоструктурным деталям и динамическим особенностям регистрируемых величин.

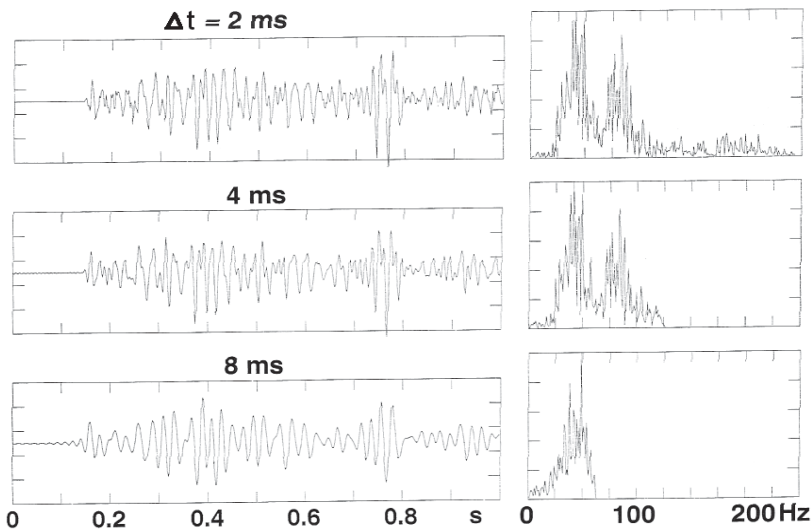


Рис. 2.12. Влияние шага дискретизации при расчете значений амплитудного спектра (справа) (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

Важный момент при обработке и интерпретации реальных данных – это то, что часто наиболее значимая информация об изучаемом объекте содержится в характеристиках, которые относятся к локальным частям измеряемых величин. Такая локальность для сейсмических наблюдений связывается с отдельными короткими сигналами. В то же время на первых этапах развития геофизических методов спектральному анализу подвергался весь ряд регистрируемых величин. Как результат, получались спектральные особенности полных наблюдений. Это давало исследователям значительную и важную общую информацию о целевых объектах или явлениях. Указанный подход полагают оправданным и в настоящее время.

Однако по мере развития геофизических исследований и появления понимания, что наиболее значимые особенности объектов и явлений могут иметь связь с локальными особенностями наблюдаемых величин, стали возникать задачи спектрального анализа локальных сигналов. При сейсмических исследованиях такие сигналы часто идентифицируются как конкретные волновые объекты, несущие информацию об определенных частях и характеристиках среды. Основным примером здесь являются отраженные сигналы, относящиеся к волнам различных типов. Такие сигналы в наибольшей мере содержат информацию, относящуюся к областям среды, где происходило формирование отражения. Эти области могут включать в себя и целевые объекты, на которые направлены проводимые исследования, к примеру, продуктивные горизонты [2, 9].

Применение окон. Самым очевидным способом изучения особенностей локальных сигналов является его селекция из общего наблюдения с последующим определением спектра выделенного сигнала. Наиболее простым способом такой селекции является использование весовых функций, или «окон», которые позволяют «вырезать сигнал» из общей последовательности импульсов [7]. Пионером среди работ в этом плане была работа Габора (Gabor, 1946). С учетом того, что современные геофизические наблюдения представляются в дискретной форме, после селекции локального сигнала мы будем иметь дело с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) для относительно короткого окна. Поэтому такое преобразование можно назвать оконным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ). В зарубежной литературе его также называют оконным дискретным преобразованием Фурье, чтобы подчеркнуть небольшую длительность используемых окон при спектральном анализе локальных сигналов.

Свойства ОДФ несколько отличаются от свойств обычного ДДФ, так как приходится учитывать влияние используемого окна. При работе с геофизическими наблюдениями анализ такого влияния требуется проводить по четырем различным факторам: формы окна, дискретность и локальность сигнала, а также наличие в области анализируемого сигнала случайных компонент. Такого типа исследования активно проводились в теории оценивания спектральных интенсивностей случайных процессов. Здесь традиционно анализировались оценки, связанные со стационарными случайными процессами, свойства которых не изменяются по временной переменной. Для геофизических же данных появлялся важный элемент в форме регулярного сигнала, который мог изменять свойства в зависимости от местоположения.

С целью учета положения и ограниченной длительности изучаемого локального сигнала $s(t)$ при его отборе из исходного наблюдения $y(t)$ будем применять весовую функцию $w(t)$. Тогда рассматриваемый сигнал имеет вид

$$\hat{s}(t) = w(t - \tau^{(j)})y(t), \quad (2.18)$$

где j определяет номер отбираемого участка, а функция $w(t)$ симметрична и отлична от нуля только при $t \in [t_1^{(j)}, t_2^{(j)}]$. Простейшим случаем $w(t)$ является прямоугольное окно $w^0(t)$, значение которого равно единице при указанных временах и нулю для всех остальных времен. Положение участка определялось значением $\tau^{(j)}$, задающим центр отбора данных или окна. При этом предполагается, что местоположение локального сигнала, т. е. значение параметра $\tau^{(j)}$, априорно известно с некоторой точностью. Например, для изучаемых сейсмических сигналов оно может быть получено посредством построения годографов волн (см. разд. 2.6), которым отвечают рассматриваемые сигналы. Такие построения используют информацию об априорной модели среды, которая обычно имеется при геофизических исследованиях.

Для области «вырезанного» сигнала при геофизических исследованиях обычно используется модельное предположение, включающее исследуемый сигнал и мешающую компоненту (см. разд. 1.5). Поэтому для всех изучаемых при спектральном анализе сигналов общим будем считать представление

$$\hat{s}(t) = w(t)s(t) + w(t)\xi(t). \quad (2.19)$$

Оно указывает на то, что функция окна оказывает одновременное влияние на сигнал и помеху. Отсюда следует, что нам не удастся получить идеальные оценки изучаемого сигнала. Но одновременно может быть рассмотрена и задача по оптимизации применяемого окна, например, для получения максимального отношения сигнал/помеха при минимальных искажениях сигнала.

Согласно общим свойствам преобразования Фурье [7], произведение двух функций эквивалентно операции свертки в спектральной области. Таким образом, представления (2.18) и (2.19) характеризуют и тип изменений, которые спектры сигнала $S(f)$ и помехи $\xi(f)$ получают при применении окон. Они будут сглаживаться спектром функции окна $W(f)$, т. е.

$$\widehat{S}(f) = W(f) * S(f) + W(f) * \xi(f), \quad (2.20)$$

где f – частота, а $*$ определяет операцию свертки по частоте.

Существенным моментом при обработке реальных геофизических данных часто оказывается то, что изучаемый реальный сигнал не может быть первоначально опознан и его положение неизвестно. В этом случае появляется необходимость в изменении параметра τ . Таким образом, приходим к указанной выше идее, что местоположение сигнала или параметр окна τ может быть такой же переменной при определении спектра локального сигнала, как и частота. Тогда спектр сигнала одномерной функции $s(t)$ будет представлять собой двухпараметрическую функцию $S(\tau, f)$, что предполагает его изменение при изменении τ . Эта идея положена в основу вейвлет-анализа и S-преобразования. Так, для S-преобразования выбрано окно в форме функции Гаусса, которая зависит от частоты:

$$w(t, f) = \frac{|f|}{k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2 t^2}{2k^2}}, \quad k > 0.$$

Вид функции обеспечивает выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t, f) dt = 1, \quad \forall f \in \mathbf{R}.$$

Тогда спектр сигнала, получаемый на основе S-преобразования, имеет вид

$$S(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\tau-t)^2 f^2 / 2} s(t) e^{-i\pi f t} dt, \quad (2.21)$$

которое с точностью до некоторой весовой функции, зависящей от параметров τ, f , совпадает с обычным преобразованием Фурье.

Важно отметить, что на развитие современных методов спектрального анализа существенное влияние оказали именно задачи обработки сейсмических данных. Это зафиксировано в названии вейвлет-анализа, так как термин «вейвлет» обозначает короткий сейсмический сигнал. Сейчас имеется значительное число работ и книг, посвященных теоретическим и прикладным основам развиваемых методов. Чтобы облегчить их восприятие, полезно использовать общий линейно-алгебраический подход. С этой точки зрения построение классического и современного спектрального анализа есть не что иное, как рассмотрение разложения наблюдений по ортогональному базису, в частности, тригонометрических функций (см. приложения 2 и 3).

Отметим еще один важный момент, присутствующий в приложениях спектрального анализа при геофизических исследованиях. Он связан с выраженной направленностью такого анализа на энергетическое распределение частотных составляющих в регистрируемых данных. Как правило, абсолютное большинство иллюстраций, демонстрирующих примеры использования спектрального анализа, на практике представляют собой вид амплитудной составляющей спектра, тогда как фазовая составляющая обычно иллюстрирует поведение и особенности теоретических решений, а не реально наблюдаемых сигналов. Таким образом, на практике совершенно не учитывается то, что амплитудный спектр представляет в большей степени информацию об интегральных или энергетических характеристиках наблюдаемых сигналов, в то время как фазовый спектр содержит информацию об их дифференциальных характеристиках. Результатом такого отношения при обработке сейсмических данных является активное использование процедур, приводящих сигналы к минимально-фазовому и даже нуль-фазовому спектру. Как следствие, получаем потерю или существенное искажение информации о фазовом спектре наблюдаемого сигнала. Несомненно, устранение фазового спектра способствует упрощению интерпретации получаемых результатов. Иногда такой подход необхо-

дим для обеспечения лучшего соответствия предположениям, заложенным в интерпретационные модели. Но наилучшим вариантом мог бы являться путь, обеспечивающий сохранение информации о фазовом спектре, а затем уже осознанное ее устранение при необходимости приведения сигнала к требуемому модельному типу. Существующее же отношение к фазовой составляющей может приводить к потерям важной геофизической информации, в связи с чем остановимся на некоторых особенностях обработки фазовых спектров реальных сигналов.

Определение и обработка фазовых спектров. Для понимания существующего отношения к фазовому спектру сигнала при обработке реальных геофизических данных укажем на три возможные причины. Первая связана с некоторой традиционной нацеленностью обработки реальных данных на времена приходов наблюдаемых сигналов, что особенно характерно для сейсмических исследований. При этом унификация формы сигналов (в частности, путем приведения их к нуль-фазовому спектру) гарантирует нам улучшение их выделения и корреляцию на исходных сейсмограммах. Вторая относится к случаю модельного рассмотрения исходного наблюдения (для сейсмических исследований – это трасса) в виде свертки исходного импульса посылки с реализацией случайного процесса. Тогда указанные предположения являются вполне оправданными. Подобные модельные предположения часто использовались при разработке отдельных процедур, к примеру, оптимальной виннеровской фильтрации. Третья – обработка больших совокупностей исходных сигналов с учетом изменения их фазовых составляющих существенно сложнее, чем обработка, построенная с использованием указанных предположений.

В то же время осознание важности фазовых спектров при изучении многих технических процессов проявилось и в активном развитии современных методов спектрального анализа. В частности, отсутствие возможностей анализировать данную составляющую у локального спектра при вейвлет-анализе способствовало появлению S-преобразования, определяемого выражением (2.21). Для сейсмических исследований на важность использования фазовой составляющей указывали исследования по оцениванию параметров тонкого слоя, где невозможно полное восстановление упругих параметров только по амплитудной характеристике спектра отраженного сигнала. В это же время в случае многомерной гомоморфной фильтрации фазовая составляющая спектра совпадает с мнимой компонентой линеаризован-

ной модели (см. разд. 2.9). Поэтому ее анализ и использование при оценивании параметров соответствующих моделей являются основной частью методов поверхностно согласованной деконволюции, когда нет достаточных обоснований для исключения этой составляющей.

Иллюстрацией важности фазовой составляющей спектра, а также особенностей ее определения при совместной обработке нескольких сигналов могут служить достаточно простые модельные примеры. При их построении использовался так называемый импульс Берлаге в форме

$$s(t) = t e^{-\alpha_0(t-t_0)} \sin(2\pi f_0(t-t_0) - \varphi_0), \quad (2.22)$$

где параметры $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\alpha_0 = 100$, $f_0 = 30$ Гц. Хорошо известно, что импульс Берлаге относится к минимально-фазовым сигналам и обладает гладким амплитудным спектром, а также простым фазовым спектром. Вид импульса и его спектров показан на рис. 2.14, *a* и *б*.

Теперь выполним следующий модельный эксперимент. Построим интерференционный сигнал, представляющий собой сумму импульсов (2.22), имеющих временную задержку Δt . Для полученного интерференционного сигнала рассчитаем значения амплитудного и фазового спектра. При определении фазового спектра будем использовать не только главные значения функции arctg , но и доопределим их до углов полной окружности, т. е. в интервал $[-\pi, \pi]$. Соответствующие значения амплитудного и фазового спектра для двух интерференционных сигналов с различными временными задержками показаны в правой части рис. 2.13, *a* и *б*.

Здесь в значениях амплитудного спектра отчетливо проявляется известный факт повышения «изрезанности» спектра при увеличении временной задержки между интерферирующими сигналами. Фазовый же спектр обладает «изрезанностью», но не совсем понятной природы. Поэтому появляется желание его отбросить. Об ошибочности такого желания свидетельствует обратный переход от спектров к временному представлению сигналов. Результаты перехода показаны в левой части рис. 2.13, *a* и *б*. Здесь сигнал черного цвета получен на основе полного спектра, т. е. использовались обе составляющие $|S|$ и φ , а для сигнала красного цвета использовались только значения амплитудного спектра, т. е. $\varphi \equiv 0$.

Результаты данного примера показывают, что при использовании обеих составляющих спектра интерференционные сигналы восстанав-

ливаются с очень высокой точностью (исключая небольшой эффект Гиббса для начальной части). В случае же потери информации о фазовом спектре приходим к значительным искажениям в форме сигнала. Таким образом, при обработке и анализе сигналов интерференционной природы очень существенно сохранять информацию о фазовом спектре.

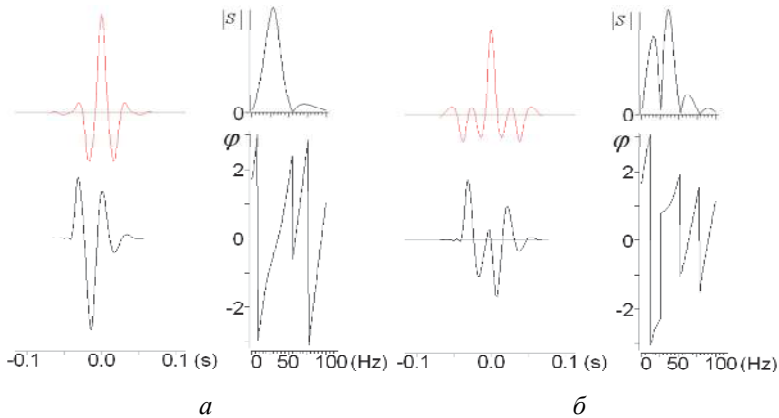


Рис. 2.13. Интерференционный сигнал и его спектры для различных значений Δt : 20 мс (а) и 40 мс (б)

Одна из главных трудностей, с которой сталкиваются при обработке и интерпретации фазовых спектров, состоит в низкой помехоустойчивости их оценок, получаемых по реальным сейсмотрассам. При этом традиционные пути повышения устойчивости оценок путем применения процедур накопления требуют однозначного определения данной составляющей спектра. Такое же требование должно быть выполнено и при реализации многих других процедур совместного анализа совокупности фазовых спектров. В то же время при рассмотрении совокупности амплитудных спектров нет необходимости в выполнении подобного требования, что существенно упрощает его обработку и использование.

Насколько проблема однозначного определения фазовых спектров существенна для процедур накопления, видно из следующего примера, построенного также с применением импульса Берлаге в форме (2.22). Форма импульса показана на рис. 2.14, а, а его амплитудная $|S(f)|$ и фазовая $\varphi(f)$ составляющая – на рис. 2.14, б.

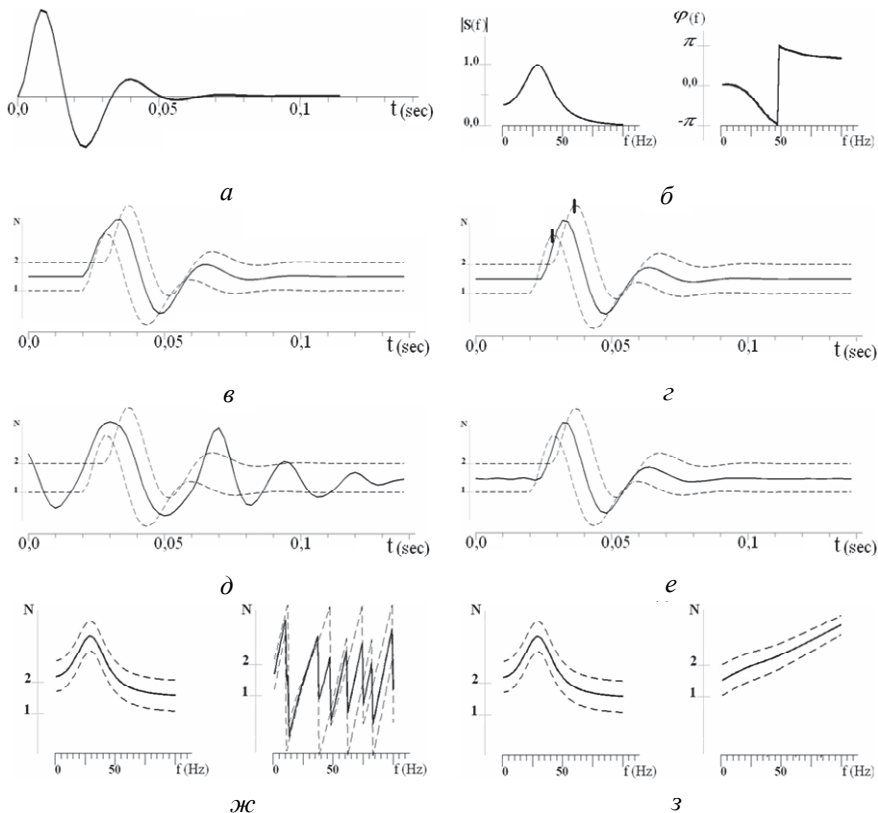


Рис. 2.14. Использование различных способов оценивания формы и спектра целевого сигнала по двум наблюдениям (пояснения в тексте)

Фазовый спектр сигнала, как и в предыдущем примере, определен в интервале $[-\pi, \pi]$, что вполне достаточно для выполнения однозначного обратного преобразования Фурье. Такого определения также достаточно для осуществления операций по осреднению спектральных характеристик сигналов с совпадающей формой и временем прихода в случае аддитивных помех. В результате могут быть получены устойчивые оценки как формы исходного импульса, так и его обеих спектральных составляющих. Ситуация кардинально меняется в случае несовпадения времен прихода сигналов. Так, при различии времен прихода t_1, t_2 на величину 10 мс для двух регистрируемых сигналов

$s_1(t) = s(t - t_1)$ и $s_2(t) = s(t - t_2)$, что меньше $1/3$ их периода, можно получить значительные искажения оценки формы сигнала. Это произойдет, когда оценка строится на основе осредненных значений амплитудной и фазовой составляющей сигналов при определении последней в интервале $[-\pi, \pi]$. Ситуация иллюстрируется рис. 2.14.

На рис. 2.14, *в-е* даны результаты суммирования сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ с использованием различных способов. Исходные сигналы отмечены пунктиром, а результат их суммирования показан сплошной линией. На рис. 2.14, *в* демонстрируется результат суммирования во временной области без учета изменения времени прихода сигналов. Очевидно, что происходит искажение формы результирующего сигнала, которое приводит к уменьшению его видимой частоты. Подобное искажение формы сигнала при несовпадении времен прихода является хорошо известным фактом. В свое время оно потребовало развития способов корреляции наблюдаемых сейсмических сигналов и корректировки их времен прихода при осуществлении процедур накопления для различных целей (оценивания спектров скоростей, построения суммарных разрезов и т. п.). Выполнение процедуры корреляции и учет изменений во временах прихода сигналов (отмечены вертикальными рисками) позволяет путем их суммирования во временной области точно восстановить форму исходного импульса $s(t)$ и получить его расположение на среднем времени (рис. 2.14, *з*).

При суммировании спектров наблюдаемых сигналов для случая фазовой составляющей, определенной в интервале $[-\pi, \pi]$, получаем очень значительное искажение формы сигнала (рис. 2.14, *д*). Оно существенно превосходит то, что имелось при суммировании сигналов во временном представлении без коррекции времен прихода.

Наглядной демонстрацией причины, приводящей к значительному искажению формы сигнала, служат рис. 2.14, *ж* и *з*, где показаны результаты суммирования спектров. Видно, что при суммировании фазовых спектров $\phi_1(f)$, $\phi_2(f)$, определенных в интервале $[-\pi, \pi]$, происходит искажение оценок $\phi(f)$, вызванное неоднозначностью определения исходных спектров (рис. 2.14, *ж*). При однозначном определении фазового спектра достигается высокая точность как в оценке формы исходного импульса, так и в его положении по времени (рис. 2.14, *е*). При этом получается и высокая точность в оценивании спектральных составляющих (рис. 2.14, *з*).

Отметим, что представленная выше ситуация и проблема совместной обработки фазовых спектров остаются неизменными при увеличении числа накапливаемых сигналов и возможном уменьшении временных сдвигов между соседними сигналами. Таким образом, приходим к задаче однозначного определения фазовых спектров сигналов. В ее решении важную роль играют окна, обеспечивающие возможность их непрерывной развертки.

2.8. ОБРАТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЛИ ДЕКОНВОЛЮЦИЯ

Такого типа преобразования в зависимости от используемого алгоритма могут быть отнесены как к нелинейным, так и к линейным методам обработки. В последнем случае их реализация обеспечивается применением линейных преобразований в форме фильтрации. Они также могут оказывать влияние на нелинейные особенности, возникающие в других алгоритмах обработки, например, при направленном суммировании с одновременным вводом кинематических поправок (разд. 2.2).

В основе обратной фильтрации лежит простая идея о том, что взаимодействие исходного источника геофизического поля со средой происходит как с «черным ящиком», который обладает некоторой импульсной или спектральной характеристикой. Такое предположение вполне оправдано в случае простой модели, представляющей рассматриваемое взаимодействие, или при малых знаниях об объекте исследования и его высокой сложности. При этом исходный источник и его взаимодействие со средой могут зависеть от различных координат (временной, пространственных). В случае непрерывных функций наблюдаемый результат подобного взаимодействия представляется интегралом свертки.

Для простоты можно считать, что исходный источник $s(t)$, а также импульсная характеристика $l(t)$ и наблюдение $y(t)$ зависят только от времени. Тогда имеют место соотношения

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)l(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)l(\tau) d\tau, \quad (2.23)$$

которые в спектральной области эквивалентны равенству

$$Y(\omega) = S(\omega)L(\omega), \quad (2.24)$$

где $Y(\omega)$, $S(\omega)$, $L(\omega)$ представляют собой спектральные характеристики $y(t)$, $s(t)$, $l(t)$, а $\omega = 2\pi f$ – круговая частота.

Отметим, что выражение (2.23) является обратным по отношению к (2.20), которое относилось к влиянию окон на спектр сигнала.

Смысл же обратной фильтрации состоит в определении $l(t)$ по известному наблюдению и источнику или их спектральным характеристикам. Поэтому такая фильтрация может быть выполнена во временном или частотном представлении. Во временном представлении она требует решения интегрального уравнения, а во втором случае – формального нелинейного преобразования $S^{-1}(\omega)Y(\omega)$.

В английском языке для соотношений (2.23) используется термин *convolution*. Поэтому операция по их разрешению относительно $l(t)$ получила термин *deconvolution*, который в русской транскрипции стал широко употребляться среди геофизиков.

Идея представления наблюдений в виде свертки (2.23) существует очень давно, начиная с развития электрических и радиотехнических систем. В геофизике она также используется продолжительное время. Так, представление наблюденного сейсмического сигнала в виде свертки исходного импульса и некоторой импульсной характеристики среды широко использовалось при разработке метода предсказывающей деконволюции (*method of predictive deconvolution*) в период с 1952 по 1957 год в США группой геофизического анализа (*Geophysical Analysis Group*), ярким представителем которой являлся Е. Робинсон.

Затем этот подход активно применялся при создании различных способов фильтрации и восстановления формы исходного сейсмического сигнала, а также при построении спектральных характеристик локальных объектов среды, в частности, тонких слоев [9]. Обоснованием модели свертки для сейсмических сигналов могут служить простые физические рассуждения, используемые при рассмотрении процессов прохождения плоских волн через среду с горизонтальными границами [1]. Наглядное изображение сейсмической трассы, получаемой в реальном сейсмическом эксперименте в предположении модели свертки, дано на рис. 2.15. Подобное моделирование использует информацию, получаемую по результатам скважинных геофизических исследований.

Обычно N существенно меньше K , а соответствующая система уравнений может быть представлена в матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{y}, \quad (2.25)$$

где элементами матрицы \mathbf{A} служат значения сигнала $s_i = s(t_i)$. Сама же матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{cccccc} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0, \\ s_2 & s_1 & 0 & \dots & 0 & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_N & s_{N-1}, \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_N \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

с размерностью $((N + K + 1) \times K)$, т. е. является прямоугольной матрицей.

Очевидно, что в вектор наблюдений \mathbf{y} может быть включена и помеха, которая присутствует в наблюдениях. Тогда система (2.25) будет эквивалентна системе уравнений (2.6), которая рассматривалась для случая регрессионных уравнений (см. разд. 2.4). Поэтому для нее могут быть использованы современные способы решения систем линейных уравнений, обеспечивающих решение всей задачи обратной фильтрации. Однако исторически на ранних этапах построения обратных фильтров еще не были развиты общие методы решения систем линейных уравнений, поэтому использовались классические схемы. В частности, от системы (2.25) переходили к системе линейных уравнений с квадратной матрицей, аналогичной системе м.н.к.:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{l} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (2.27)$$

При детальном рассмотрении матрицы этой системы выяснилось, что ее элементами являются значения автокорреляционной функции сигнала. Это же обеспечивает более высокий уровень симметрии матрицы, характерный для матриц Тейлора. Кроме того, это же совпадало и с дискретным представлением решения интегрального уравнения Винера–Хопфа, обеспечивающего построение оптимального в среднеквадратическом смысле обратного фильтра.

К настоящему времени существует значительное число различных алгоритмов решения задачи обратной фильтрации. Рассмотрению как самих алгоритмов, так и их приложений посвящено огромное количество работ. Соответствующие ссылки можно найти в книгах [1, 3, 5, 9, 12]. Углубленное изучение возникающих здесь вопросов требует зна-

чительного времени. Поэтому приведем только некоторую классификацию таких алгоритмов, что поможет сориентироваться в предлагаемом разнообразии. В основу классификации положено целевое назначение построенных фильтров.

I. Алгоритмы, направленные на обнаружение целевых сигналов. При этом обеспечивается максимальное отношение наибольшего значения сигнала к среднеквадратическому уровню помех. Как правило, при работе таких алгоритмов форма сигнала искажается, и его использование оправдано при малом отношении сигнал/помеха.

II. Алгоритмы, направленные на минимальное искажение формы целевого сигнала. Здесь важным критерием является минимальное среднеквадратическое отклонение результата фильтрации от истинных сигналов. Фильтры обычно применяются при достаточно высоком отношении сигнал/помеха (не ниже единицы).

III. Алгоритмы, направленные на максимальное сжатие исходного сигнала, что позволяет по результатам фильтрации получить наиболее точную оценку импульсной характеристики среды согласно выражению (2.24). Применение таких фильтров возможно при любом отношении сигнал/помеха. Но при малых отношениях важным является знание формы исходного сигнала.

IV. Алгоритмы, направленные на прогноз и устранение воздействия сигнала на импульсную характеристику среды. Такие фильтры особенно эффективны для подавления кратных волн.

Для иллюстрации особенностей и значимости использования обратной фильтрации при обработке реальных сейсмических данных приведем два примера (рис. 2.16 и 2.17).

На первом представлены исходные сейсмограммы (рис. 2.16), полученные при проведении морских исследований. Хотя качество этих материалов значительно выше, чем при наземных сейсмических исследованиях, по ним видно, что присутствующие многократные отражения, связанные с реверберацией, затрудняют выделение целевых отраженных сигналов от глубоких горизонтов. Особенно существенно этот эффект проявляется на временах, превышающих две секунды. Применение процедуры деконволюции упрощает определение сигналов и повышает качество интерпретации данных.

Следующий пример (рис. 2.17) демонстрирует результат применения деконволюции к суммарному разрезу. В данном случае она помогает улучшить как выделение, так и прослеживаемость основных отражений.

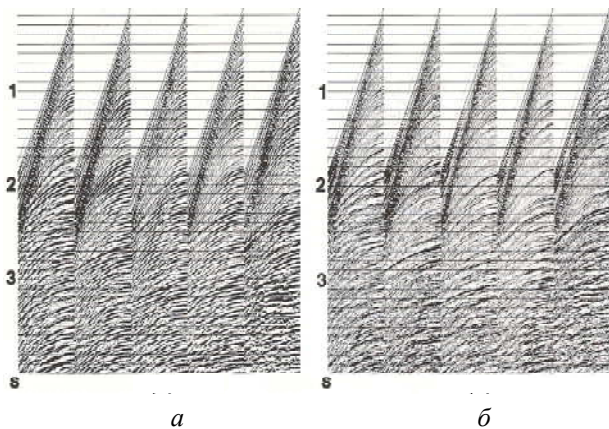


Рис. 2.16. Реальные сейсмограммы до (а) и после (б) применения операции деконволюции (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

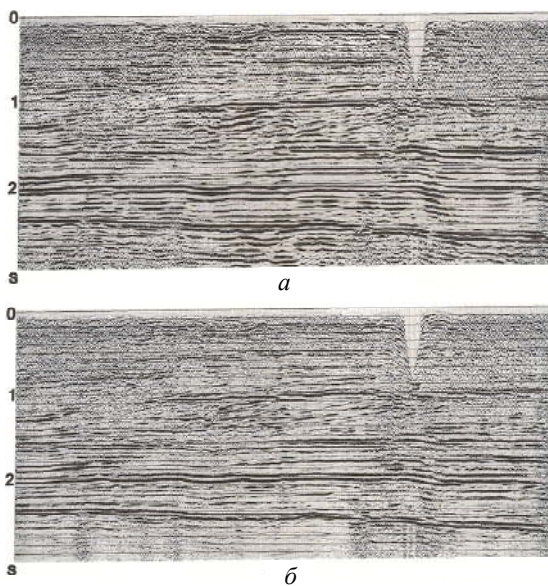


Рис. 2.17. Временные разрезы, полученные без а и б с применением деконволюции (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

Применение этой процедуры увеличивает разрешенность записи, что улучшает идентификацию целевых отражающих горизонтов во всем разрезе. Одновременно она освобождает соответствующие отражения от значительного фона реверберации и других кратных волн. В результате удается определить мелкие детали в строении целевых горизонтов, в частности, разрывные нарушения и выклинивания. При этом устраняются и некоторые ложные элементы, что повышает достоверность проводимых геологических построений на уровне как отдельных разрезов, так и обобщающих карт.

2.9. ПОВЕРХНОСТНО СОГЛАСОВАННАЯ ДЕКОНВОЛЮЦИЯ

Классическая модель свертки в форме (2.23) или (2.24) предполагает неизменность исходного импульса, а иногда и полную информацию о нем. Однако в реальном геофизическом эксперименте такие условия часто бывают невыполненными. Более того, при проведении современных сейсмических работ количество источников и приемников столь велико, что их невозможно полностью контролировать. Поэтому возникают задачи определения и коррекции изменения динамики сейсмических волн, которые связаны с неоднородностью реальных условий возбуждения и приема сейсмических колебаний. Когда подобные изменения приводят только к изменениям времен прихода сигналов, то ставится задача коррекции временных статических поправок. В случае изменения формы сигнала мы приходим к задаче частотно-зависимой статики. Одним из способов ее решения является поверхностно согласованная фильтрация, или деконволюция [9, 12].

В основе указанных способов коррекции формы сигналов или решения задачи частотно-зависимой статики лежат мультипликативные модели. Рассмотрим такую модель для участка трассы $y_{ij}(t)$, содержащего фиксированную отраженную волну. Она имеет вид

$$y_{ij}(t) = s_i(t) * r_j(t) * u_{ij}^M(t) + \xi_{ij}(t). \quad (2.28)$$

Здесь $*$ обозначает операцию свертки по времени; $s_i(t), r_j(t)$ – импульсные характеристики зон возбуждения и приема сейсмического сигнала в точках i -го источника и j -го приемника соответственно; $u_{ij}^M(t)$ – импульсная характеристика среды, определяемая типом волны. Отно-

нительно $u_{ij}^M(t)$ делаются дополнительные предположения, связанные, как правило, с используемой моделью среды.

Впервые модели такого типа были предложены И.И. Гурвичем при анализе формы сейсмических отраженных сигналов. Его работа, опубликованная в 1970 году, давала эвристическое описание процесса распространения сейсмического сигнала в среде как прохождения через некоторый фильтрующий сейсмический канал, где имеется несколько последовательных фильтров [9]. Выделяемые фильтры связывались с основными элементами среды, которые наиболее значимо влияли на форму регистрируемого сигнала. Например, если предположить, что покрывающая среда однородна и не оказывает существенного влияния на форму распространяющегося сейсмического импульса, отвечающего отраженной волне от фиксированной границы в некоторой общей центральной точке (см. разд. 2.6), обозначаемой как $i + j$, то для $u_{ij}^M(t)$ может быть использовано простейшее представление $u_{ij}^M(t) = L_{i+j}(t)$, а все выражение (2.28) переписано в виде

$$y_{ij}(t) = s_i(t) * r_j(t) * L_{i+j}(t) + \xi_{ij}(t). \quad (2.29)$$

Когда эффекты распространения через покрывающую среду представляются характеристиками, зависящими от удаления источник–приемник, обозначаемыми как $i - j$, т. е. $u_{ij}^M(t) = L_{i+j}(t) * R_{i-j}(t)$, то получаем выражение

$$y_{ij}(t) = s_i(t) * r_j(t) * L_{i+j}(t) * R_{i-j}(t) + \xi_{ij}(t). \quad (2.30)$$

В любом из представленных видов модели (2.28) многократность свертки приводит к нелинейной зависимости наблюдений $y_{ij}(t)$ от неизвестных параметров (функций), в качестве которых выступают характеристики источников, приемников, точки (области) отражения и среды распространения, т. е. $s_i(t)$, $r_j(t)$, $L_{i+j}(t)$, $R_{i-j}(t)$. Решение соответствующей нелинейной задачи может быть выполнено различными способами. Одним из них является линеаризация исходных уравнений. Примером такой линеаризации служит переход к логарифмам спектров $y_{ij}(t)$, которые обозначим $z_{ij}(\omega)$, где ω обозначает кру-

говую частоту (см. разд. 2.8). Тогда для представлений (2.29) и (2.30) будем иметь следующие выражения:

$$z_{ij}(\omega) = \alpha_i(\omega) + \beta_j(\omega) + \gamma_{i+j}(\omega) + \varepsilon_{ij}(\omega), \quad (2.31)$$

$$z_{ij}(\omega) = \alpha_i(\omega) + \beta_j(\omega) + \gamma_{i+j}(\omega) + \lambda_{i-j}(\omega) + \varepsilon_{ij}(\omega).$$

Они уже линейны относительно неизвестных функций: $\alpha_i(\omega)$, $\beta_j(\omega)$, $\gamma_{i+j}(\omega)$, $\lambda_{i-j}(\omega)$, которые представляют собой комплексные логарифмы спектров неизвестных функций исходных выражений (2.29) и (2.30). При этом составляющая $\varepsilon_{ij}(\omega)$ имеет свойства, которые существенно отличаются от свойств $\xi_{ij}(t)$. В частности, $\varepsilon_{ij}(\omega)$ начинает зависеть от отношения сигнал/помеха в исходных данных $y_{ij}(t)$.

Представления (2.31) при фиксированном значении частоты совпадают с линейными регрессионными моделями вида (2.7). Поэтому при их изучении и анализе свойств, определяемых оценок неизвестных параметров могут быть использованы все результаты, полученные для такого типа моделей (см. разд. 2.5).

После определения неизвестных параметров модели (2.31) они могут быть использованы для различных целей. Одним из наиболее очевидных приложений является построение корректирующего оператора (фильтра) $R_{i,j}(t) = s_i^{-1}(t) * r_j^{-1}(t)$, который применяется к исходным данным $y_{ij}(t)$, устрояя в них изменения, вызванные неоднородностью

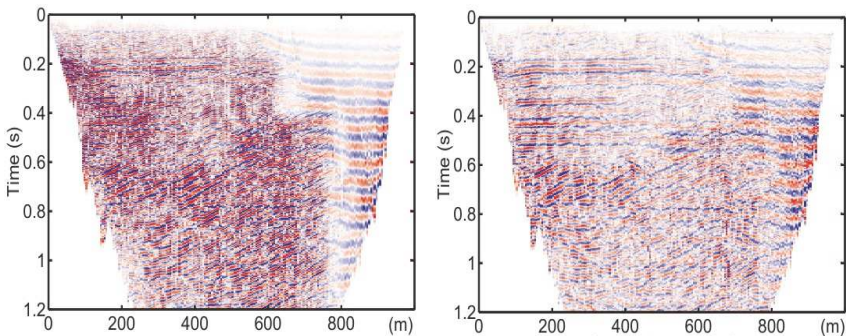


Рис. 2.18. Временные разрезы до (слева) и после (справа) применения поверхностно согласованной фильтрации (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

в условиях возбуждения и приема сейсмических колебаний. Такой оператор может быть построен, если ориентироваться на определенный тип сигнала (волны) или для совокупности сигналов, которые отвечают большой длительности наблюдения и обладают различной природой.

Сама процедура определения и использования указанного оператора $R_{ij}(t)$ называется поверхностно согласованной фильтрацией (*surface consistent deconvolution*). Пример ее применения показан на рис. 2.18. Здесь отчетливо видно, что использование такой фильтрации позволило существенно скорректировать неоднородность частотного состава, наблюдаемую в левой и правой частях разреза. Часто подобные эффекты могут возникать в зонах сочленения данных, получаемых при переходе от наземных к морским сейсмическим исследованиям.

ЗАДАНИЯ, ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ

Задания для самостоятельной работы

1. Рассмотрите способы обработки данных, которые вы используете в своей работе, и укажите, с какой целью они применяются.
2. Постарайтесь охарактеризовать каждый из используемых способов и оцените эффективность его применения.
3. Имеется ли у вас ощущение достаточности применяемых способов обработки по отношению к данным и поставленной задаче, где эти данные предполагается использовать?
4. Сможете ли вы предложить дополнительные процедуры обработки данных с указанием их направленности?

Примеры контрольных вопросов

1. Основные этапы обработки геофизической информации.
2. Различие между предварительной и интерпретационной обработкой данных.
3. Различие между линейными и нелинейными методами обработки данных.
4. Линейные способы преобразования геофизических данных.
5. Особенности расчета спектральных характеристик для реальных данных.

6. Ограничения классического спектрального анализа и современные методы.
7. Выделение целевых сигналов и когерентные методы суммирования.
8. Нелинейные методы обработки геофизических данных. Их преимущества и недостатки.
9. Особенности применения нелинейных методов обработки.
10. Объектно ориентированные методы обработки.
11. Стратегия выбора метода обработки геофизических данных.

Задачи

Задача 2-01. Имеются два сигнала периодической структуры с совпадающей формой и периодом, равным T . Чему будет равна сумма (разность) этих сигналов при наличии сдвига τ у одного из сигналов на величину $\tau_1 = T/2$ и $\tau_2 = T/4$?

Задача 2-02. Измерена температура T в скважине в пяти точках: [10.2; 12.7; 12.5; 14.0; 15.1] °C на глубине H : [10; 20; 30; 40; 50] м. Требуется определить температурный градиент в рамках линейной регрессионной модели и привести соответствующую трендовую прямую. Как можно характеризовать полученное отклонение температуры от линии тренда?

Задача 2-03. Имеется измерение некоторой геофизической величины τ по профилю с удалением от начала координат [0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9] м. Определить линейный тренд этой величины при значениях τ : [0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9] и τ : [0; 1; 2; 3; 3; 6; 6; 7; 8; 9]. Что можно сказать о поведении этой величины в первом и во втором случае? Какой вывод может быть сделан, если используется оценка дисперсии?

Задача 2-04. Построить лучи и рассчитать годограф отраженной и головной волны для модели слоя с горизонтальной границей на глубине 1 км при скорости в слое 2 км/с и скорости в подстилающей среде 3 км/с. Система наблюдений имеет 10 приемников с расстоянием 100 м и расположением первого приемника на удалении 400 м от точки источника.

Задача 2-05. Построить лучи и рассчитать годограф отраженной и головной волны для модели слоя с наклонной границей (параметры

модели можно задать самостоятельно) для двух систем наблюдения: с фиксированным положением источника и изменяющимся положением источника–приемника относительно начала системы координат.

Задача 2-06. Какие параметры модели среды с горизонтальной границей можно определить по шести временам прихода головной волны x_j [1.012; 1.035; 1,046; 1.052; 1.06; 1.088] с, когда первый приемник расположен на расстоянии 2 км от источника, а последующие приемники имеют шаг 500 м?

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

3.1. ПРИНЦИПЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Само понятие интерпретации достаточно общее. Разъяснение его смысла с различных точек зрения можно найти в толковых словарях и Интернете. Корни его происхождения в древней латыни, где оно обозначало истолкование, разъяснение чего угодно: понятий, событий, явлений и т. д. Основной же его смысл сохраняется до настоящего времени и состоит в достижении понимания объектов, с которыми мы можем сталкиваться. Часто такое понимание, особенно в естественно-научном познании природы, достигается путем использования хорошо знакомых, изученных ранее понятий. Очевидно, что этот подход обладает положительными и отрицательными моментами. Положительным является то, что мы используем привычные понятия, смысл которых нам хорошо знаком. Отрицательным же будет то, что мы к незнакомому объекту пытаемся применить понятия, которые могут к нему и не подходить. Все эти рассуждения могут относиться и к интерпретации геофизических данных.

Во введении и в первой главе уже указывалось, что геофизические методы исследования Земли опирались на хорошо изученные физические явления. Это же звучит и в названии всей науки, которая является достаточно молодой и до настоящего времени проходит процесс своего становления. Поэтому многие понятия и методы интерпретации геофизических данных, включая и результаты их обработки, претерпевают развитие, а иногда и изменение смысла. Например, исходное описание распространения сейсмических волн законами оптики существенно усложняется при рассмотрении многофазных сред. Другим

примером служит одно из ключевых понятий геофизической разведки – нефтегазовая ловушка. Первоначально оно обычно ассоциировалось с локальными антиклинальными структурами. На это было направлено построение структурных карт по временам прихода сигналов отраженных сейсмических волн. Но к настоящему времени удалось выяснить, что количество резервуаров нефти и газа, не отвечающих этому структурному типу, в два раза превышает число структурных ловушек. В результате потребовалось ввести два типа понятий: структурные и неструктурные ловушки, что способствовало развитию новых методов интерпретации, направленных на определение второго типа ловушек.

Таким образом, можно лишь приблизительно указать основные этапы и принципы интерпретации и соотнести их с основными существующими геофизическими методами [2, 3, 9, 13]. Мы будем опираться на следующие основные принципы интерпретации геофизических данных.

- **Принцип ориентированности задач.** Согласно этому принципу данные получались с целью решения определенной геофизической или геологической задачи.

- **Принцип дополнения априорной информации.** Предполагается, что данные и результаты их обработки используют такую информацию и пополняют ее.

- **Принцип комплексирования.** Согласно ему данные, получаемые различными методами, должны увязываться между собой.

- **Принцип разномасштабности.** Предполагается, что для изучения объектов с различными масштабами может потребоваться использование различных данных.

Согласно первому из указанных принципов предполагают, что до получения данных имелась уже некоторая ориентация их целевого назначения. Как правило, в этом случае мы имеем и некоторое представление об исследуемом объекте, хотя бы самое общее. Например, он удаленный и неизвестный. При полном отсутствии такой информации интерпретация получаемых геофизических данных будет чрезвычайно затруднена или совершенно невозможна.

Согласно второму принципу при обработке и интерпретации данных должна максимально использоваться априорная информация, которая может носить самый различный характер. Фактически часть этой информации могла уже возникать при формулировании задачи получения данных, но в процессе работы с данными она может существенно увеличиваться и уточняться.

Третий принцип обеспечивает взаимный контроль и дополнительную информацию, получаемую по различным данным. Первоначально комплексирование ограничивалось сопоставлением моделей, построенных на основе различных геофизических методов. Развитие этого принципа привело к изучению взаимодействий различных геофизических полей, в частности, сейсмических и электрических. При этом стали возникать и новые методы исследования среды, например, сейсмоэлектрические. Активно начали использоваться и совместные постановки обратных задач для нескольких различных типов данных, например, сейсмических и гравиметрических. Такие комплексные исследования повышают точность и достоверность получаемых решений.

Важности использования разномасштабных измерений при изучении реальных сред было уделено много внимания в первой главе.

Представленные на рис. 3.1 элементы показывают место обработки и интерпретации в общей структуре геофизических исследований. Видно, что интерпретация совместно с обработкой является одним из центральных элементов. В то же время они существенно зависят от постановки исходной задачи, используемой модели, априорной информации и проведенного полевого эксперимента. Одновременно их результаты могут оказывать существенное влияние на модель среды и априорную информацию, а через них приводить к изменению постановки задачи и получению новых данных. Таким образом, вся схема геофизических исследований может многократно повторяться, обеспечивая повышение точности определяемого объекта.

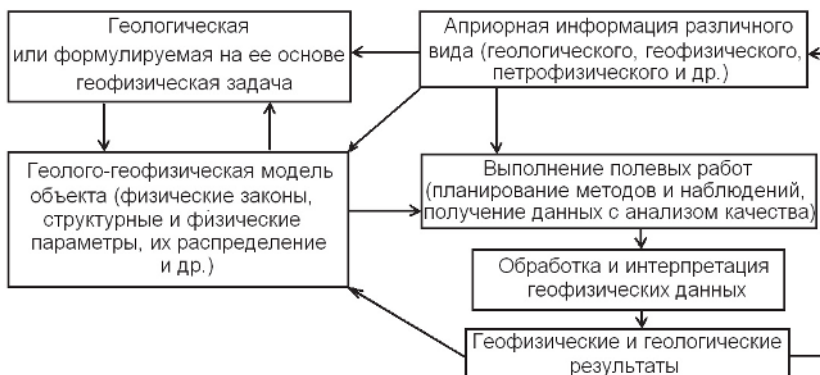


Рис. 3.1. Укрупненная схема, демонстрирующая основные элементы и их связи при постановке и выполнении геофизических исследований

Чтобы лучше понять, какие из геофизических методов какую роль играют при определении геолого-геофизической модели объекта и в априорной информации о нем, приведем их основные характеристики. Это же поможет нам понять прикладную значимость каждого из геофизических методов, а также возможности их комплексирования. Отметим, что существующие интерпретационные программные комплексы почти все делают реально выраженным комплексное использование геофизических данных.

Начнем с сейсмических методов, которые занимают центральное место в современных поисковых и мониторинговых задачах, а финансовые затраты на проведение соответствующих работ составляют почти 95 % от всех геофизических исследований. Основой методов являются упругие колебания, распространяющиеся в среде. При этом используются самые различные источники таких колебаний как естественного, так и искусственного происхождения. Частоты наблюдаемых сигналов могут составлять от десятых долей герца до десятков килогерц. Всё вместе позволяет использовать данные методы как удаленные и разномасштабные. Благодаря этому с их помощью удалось обнаружить внутри геосферы контрастные границы раздела физических свойств, что способствовало развитию новых геологических моделей строения Земли. Условно сейсмические методы можно разделить на две большие группы: поверхностные и скважинные. Среди поверхностных методов выделяются две большие группы, основанные на отраженных (МОВ) и преломленных (МПВ) волнах. МОВ используются для определения глубины и характера залегания границ раздела среды, а также для получения данных о литологических и фациальных характеристиках пород и возможном содержании флюида в поровом пространстве. МПВ представляют собой группу универсальных методов, применяемых для исследования состава пород в большом диапазоне глубин – от нескольких метров до десятков километров. В скважинных методах выделяются методы вертикального сейсмического профилирования (ВСП), которые обладают большей разрешающей способностью, чем поверхностные сейсмические методы, а также методы акустического каротажа (АК), которые работают на высоких частотах, что обеспечивает высокую детальность, но малую область исследования. Примеры данных, получаемых с использованием различных сейсмических методов, приведены в разд. 1.2 и 1.4.

Широкое распространение при геофизических исследованиях имеют и электрометрические методы (примеры данных показаны на рис. 1.2 и 1.3). Они также обладают разномасштабностью и играют

важную роль в интерпретационных построениях при определении детального строения и характеристик изучаемой части среды. Методы основаны на изучении электропроводящих и поляризационных свойств пород. Поэтому основными параметрами являются электрическое сопротивление и электрическая поляризуемость (способность пород к накоплению и отдаче электрических зарядов). В зависимости от применяемых источников тока методы подразделяются на методы постоянного тока и переменного электромагнитного поля. К первому типу методов относятся измерение естественного электрического поля и электротзондирование. Они применяются при решении структурных и поисковых задач (рудные тела), выявлении и прослеживании контактов пород с различными электрическими свойствами, определении мощности и глубины залегания слоев (близких к горизонтальным), различающихся электрическим сопротивлением. В случае переменного поля методы различаются частотами. Они применяются при региональных и детальных исследованиях. Например, для определения глубины залегания слоев повышенной проводимости в нижней части коры и верхней мантии, кристаллического фундамента, разломов в фундаменте и осадочном чехле, для расчленения осадочного чехла, прослеживания зон выклинивания литологических комплексов, определения экранированных (стратиграфически, литологически) ловушек нефтяных коллекторов.

Гравиметрические методы направлены на получение количественных и качественных плотностных характеристик исследуемого объекта по результатам измерения естественного гравитационного поля Земли. Наибольший интерес представляют вариации этого поля, из которых убраны глобальная и региональная составляющая. Результаты таких исследований представляются схемами, картами и разрезами, соответствующий пример показан на рис. 2.6. Их использование особенно эффективно при изучении вертикальных и субвертикальных границ раздела плотностей, а также при исследовании объектов с высокой локализацией. Существенными моментами гравиметрических методов являются относительная дешевизна и оперативность проведения полевых работ.

Магнитометрические методы основаны на различии в интенсивности намагничивания горных пород в магнитном поле, благодаря чему в окружающем их пространстве возникают магнитные аномалии. Эти методы используются как рекогносцировочные и поисковые благодаря своей дешевизне и оперативности (примеры данных и их использова-

ния представлены на рис. 1.3, 1.4, 1.16 и 2.7). Обычно магниторазведкой решаются следующие задачи: изучение общего геологического строения земной коры в районах, закрытых молодыми осадочными отложениями или водами морей, тектоническое районирование таких территорий, трассирование разломов, даек, жил и других геологических тел, контролирующих месторождения нерудных полезных ископаемых. Микромагнитные наблюдения с целью определения главных направлений трещиноватости и тектонических напряжений в осадочных толщах. Магнитные свойства пород меняются и в толщах, перекрывающих залежь нефти в ее окрестностях под действием мигрирующих углеводородов. Это позволяет применять магниторазведку – как прямой метод поисков нефти.

Радиометрические методы основаны на изучении различных проявлений естественной радиоактивности и использования ее для установления типа вещества (пример рис. 2.13). Кроме руд радиоактивных элементов значительную радиоактивность имеют кислые изверженные породы (граниты). Среди осадочных пород наибольшей радиоактивностью обладают калийные соли и ангидриты, наименьшей – каменная соль, гипс, хемогенные известняки. Высока радиоактивность глин. Она обусловлена высокой удельной поверхностью глинистых частиц, обеспечивающих абсорбцию значительного количества радиоактивных элементов, и присутствием радиоактивных элементов (например, калия) в скелете некоторых глинистых минералов в бассейнах осадконакопления. Промежуточной радиоактивностью обладают песчаники, органогенные известняки. Методы радиометрической съемки используются при поверхностных и скважинных исследованиях.

3.2. СВЯЗЬ ИНТЕРПРЕТАЦИИ С ПРЯМЫМИ И ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ

Эту связь мы видим на схеме, изображенной на рис. 3.1, а также в общем представлении о современных методах изучения природных объектов, включающих формализацию модели исследуемого объекта и использование математических методов при обработке данных с целью определения характеристик объекта или его модели. Схематически процесс построения формализованной модели объекта с участием в нем данных, а также прямой и обратной задачи представлен на рис. 3.2.

Рисунок отображает следующую идею. В том случае, когда для объекта исследования может быть построена некая формализованная

модель объекта, представляющая его идеализированный образ, на ее основе могут быть получены соответствующие данные. Если модель представляется математическими характеристиками (параметрами), то, как правило, она позволяет получать данные в цифровом виде. Такой переход от модели к данным может быть назван прямой задачей. Тогда обратный переход от данных к характеристикам модели логично называть обратной задачей.

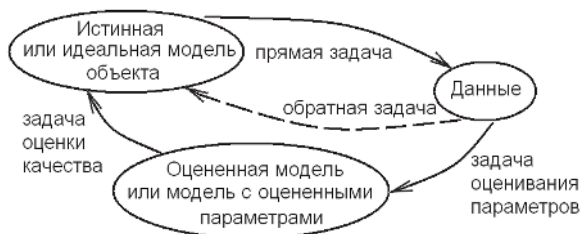


Рис. 3.2. Прямая и обратная задача в построении модели объекта

Отметим, что понятия прямой и обратной задачи первоначально формулировались математиками, а затем они получили распространение в прикладных областях знания. При этом традиционное изображение связи между моделью и данными посредством прямой и обратной задачи не включало дополнительных элементов (на рис. 3.2 это показано пунктирной линией). Однако, по мере практического использования и развития математических аспектов появилось понимание важности задачи оценивания параметров модели и последующей задачи анализа качества построенной модели. К этим задачам мы будем обращаться при рассмотрении результатов обработки геофизических данных и их интерпретации.

Наиболее простые способы формулирования и решения обратных задач возникают тогда, когда решение прямой задачи может быть представлено в форме относительно простой функции, связывающей наблюдения или решение прямой задачи с параметрами объекта. В этих случаях, как правило, всегда удастся построить некоторые функции, которые позволяют на основе наблюдений достаточно просто определять параметры объекта. Обычно такие функции называются инверсными функциями или инверсными формулами. Более сложные ситуации с постановкой обратной задачи возникают, когда решение прямой задачи может быть сформулировано только в виде

некоторого алгоритма. Например, решение прямой задачи строится в форме совокупности некоторых операторов, позволяющих получать модельные данные, приближающие реальный эксперимент, а их сопоставление выполняется на основе некоторой метрики (приложение 1). Так, при рассмотрении годографов головной волны (см. разд. 2.6) по отношению к реальным данным обратная задача может быть определена как проблема подбора параметров модели среды, обеспечивающих соответствующую прямую линию, которая является существенно более тяжелой, чем прямая задача, где для произвольной среды получается требуемая прямая. Другой пример прямой задачи – широко распространенный в практической сейсморазведке способ моделирования, основанный на операции свертки заданного импульса с импульсной характеристикой среды. Обратной же задачей здесь будет проблема деконволюции (см. разд. 2.8), где по наблюдаемому сигналу требуется определить импульсную характеристику среды.

Обратные задачи могут быть сформулированы с учетом вероятностного поведения реальных данных или модельных параметров. Особенно часто это делалось в случаях сложных экспериментов или объектов. В этих случаях нам требуется решать много дополнительных вопросов. Например, проявляющиеся вариации оценок полностью ли относятся к распределению параметров модели? Также в связи с такими постановками задачи необходимо знать, какой тип распределений имеется в реальности (приложение 5) и как он соотносится с модельными предположениями.

Понятие обратной задачи трансформировалось по мере развития геофизики, и к настоящему времени существуют три наиболее используемых толкования: 1) в смысле уравнений математической физики; 2) в смысле операторных уравнений; 3) в интерпретационном смысле. Наиболее широкое толкование имеет место в третьем случае, а наиболее точное и формализованное – в первом. Указанные толкования, особенно первое и второе, могут быть представлены в терминах функционального анализа. Последнее толкование наиболее важно для формализации процедур обработки и интерпретации геофизических данных.

Традиционно считается, что в первом из указанных толкований (смыслов) постановки задач более обоснованны. Однако они носят излишне идеализированный характер по отношению к реальным экспериментам и не учитывают многих особенностей наблюдаемых явлений. Поэтому часто постановки задач в редуцированной операторной форме бывают глубже по геофизической обоснованности. Для понимания этого аспекта рассмотрим третий случай постановок задач.

Здесь появляется важное понятие интерпретационной модели. В него входят представления о модели среды и полях данных. Как правило, наблюдаемое геофизическое поле представляется в виде суммы двух компонент, примерами служат выражения (1.1), (2.3), (2.7), (2.15) и (2.28). Обычно первая компонента описывает составляющие поля, интерпретируемые в рамках модели среды и служащие основой для определения ее параметров. Вторая компонента вбирает в себя оставшуюся часть поля, рассматриваемую как помеха по отношению к первой компоненте. При этом обратная задача формулируется как восстановление наилучшим образом параметров среды в рамках данной интерпретационной модели.

Отсюда следует важность для интерпретационных постановок рафинированных обратных задач математической физики и одновременно их ограниченность. Они позволяют прояснить (высветить) отдельные особенности глобальной интерпретационной задачи и предложить процедуры ее решения. Постановки обратных рафинированных задач способствовали введению в практическую геофизику следующих важных понятий: модельность, неоднозначность, достаточные системы данных, а также математизации и формализации геофизических процессов обработки и интерпретации данных. Возможно, с этим связан тот факт, что процессы обработки и интерпретации геофизических материалов содержат в себе ряд обратных задач первых двух типов. Но ни одна из рафинированных постановок не исчерпывает полностью всего процесса современной интерпретации геофизических данных.

Учитывая важность математических постановок обратных задач в интерпретационном процессе, рассмотрим их использование в историческом развитии геофизических методов исследования Земли. Условно можно выделить следующие два этапа на этом пути и указать основные методы прикладной математики, которые были здесь использованы.

От начала прошлого века до 20–30-х годов рассматривались в основном простые модели объектов среды. Это приводило к рафинированным математическим постановкам задач в геофизике, которые относились к области задач математической физики. Такие задачи были связаны с достаточно простыми дифференциальными уравнениями, а их решение не представляло больших трудностей. В частности, при рассмотрении процессов распространения упругих колебаний в Земле использовался принцип Ферма и вытекающее из него уравнение, связывающее времена прихода волн со скоростными особенностями модели среды. Это позволяет рассчитывать соответствующие времена

волн, которые проходят через заданную модель среды, что является решением прямой кинематической задачи. В 1906 году Р. Олдхем на основе результатов решения прямой кинематической задачи получил первые оценки характера неоднородности вещества Земли методом визуального отбора гипотез о строении среды по сопоставлению расчетных годографов волн с экспериментальными данными.

Как следствие таких постановок, возникли способы характерных точек, позволяющие достаточно просто определить параметры несложных моделей, т. е. осуществить построение решения соответствующей обратной задачи. Эти методы оказались очень эффективными в силу их простоты и высокой устойчивости. Методы характерных точек в настоящее время широко применяются в представлении графических образов и в геодезии при описании сложных поверхностей. Простым примером применения характерных точек при описании некоторой кривой может служить описание параболы посредством использования координаты ее вершины и координаты двух точек пересечения ветвей параболы с осью ординат. В геодезии таким примером может быть описание некоторой возвышенности, которая имеет характерную точку – вершину, боковые скаты (или склоны) и характерную линию – линию подошвы. Такой способ особенно хорош при отображении неаналитических поверхностей, например, рельефа земли или морского дна. Подобные способы представляют собой типичный переход от исходных данных к достаточной системе данных.

Эти методы до настоящего времени эффективно применяются и при геофизических исследованиях. Например, при интерпретации данных магнитотеллурического зондирования (МТЗ) используются теоретические и экспериментальные связи координат характерных точек кривых МТЗ с параметрами разреза. В частности, при благоприятных условиях величина среднего продольного сопротивления ρ_L надпорной толщи может быть определена по ординате минимума кривой МТЗ как $\rho_L = P \cdot \rho_{\min}$, где P – коэффициент, зависящий от соотношения параметров разреза.

Одновременно происходило развитие некоторых методов построения решения обратных задач, основанных на интегральных уравнениях, которые получались в процессе решения прямых задач для соответствующих дифференциальных уравнений. Так, в поисках математического аппарата кинематической сейсмологии, адекватного задаче описания свойств среды по заданным из эксперимента годографам волн, Герглотц и Вихерт в 1905–1907 годах рассмотрели первую обратную

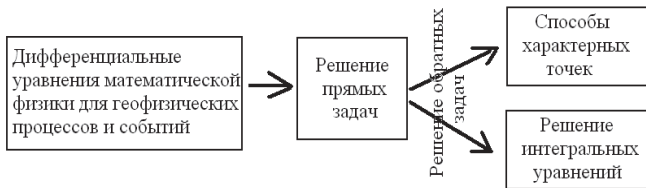
кинематическую задачу. Полученный ими результат в виде соответствующих формул позволил непосредственно по годографу рефрагированной волны определять одномерный закон изменения скорости в Земле в предположении сферически-симметричного ее строения и монотонного возрастания скорости с глубиной. Следует отметить, что большинство из достигнутых к последнему времени сейсморазведкой и сейсмологией значительных практических результатов обязано, прежде всего, успехам в решении обратных кинематических задач.

В 40–60-е годы прошлого столетия по мере усложнения моделей и развития методов решения прямых задач активно стали развиваться палеточные методы, или методы подбора. Такой подбор мог осуществляться самым различным образом, в частности, через применение определенных метрик, приводящих к методу наименьших квадратов (приложение 1). Одна из главных особенностей этих методов на первом этапе – малое число параметров модели (менее пяти). На втором этапе их число существенно возросло.

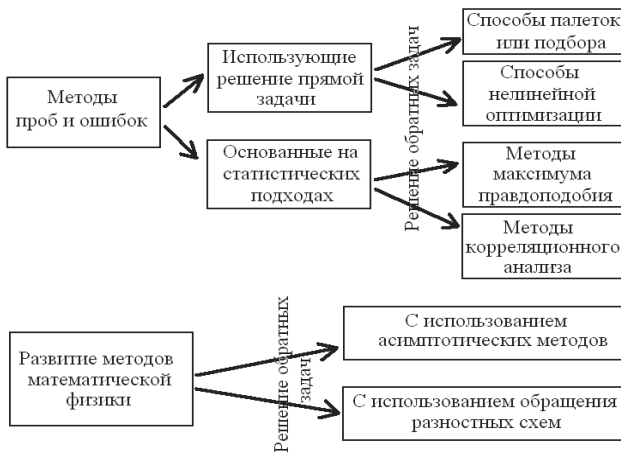
Развитие методов подбора способствовало развитию статистических способов решения обратных задач геофизики (рис. 3.3). Они сформировали отдельное направление таких решений. В дальнейшем развитие статистического и детерминистского подходов к решению обратных задач происходило по двум независимым направлениям. Первое – в рамках простых моделей сред усложнялись модели наблюдаемых данных главным образом за счет добавления мешающих компонент в основном стохастической природы. Это направление привело к усовершенствованию статистических способов решения обратных задач. Второе направление связано с усложнением моделей сред. При этом усовершенствовались способы решения задач математической физики. Последние, как правило, были основаны на разложениях наблюдений в ряды, коэффициенты которых (новые системы данных) несли информацию о параметрах среды. Иллюстрацией такого подхода может служить усложнение однородной модели среды путем введения в нее особенностей с малыми вариациями параметров.

Проблема соотношения статистического и детерминистского подходов достаточно долгое время волновала геофизиков. Поэтому остановимся на этом вопросе отдельно. В 1960-х годах они разделились и существовали почти без пересечения. Более того, имелось взаимное непонимание и неприятие. Это было связано с иллюзией, что оба подхода претендуют на общее решение задачи. Существенную роль в примирении этих подходов сыграло понимание того факта, что их значимость меняется по мере интерпретации данных от выбора модели

среды к алгоритму оценивания параметров: вначале велика роль математической физики, затем статистики. Возможно, приведенная схема слишком примитивна, так как уже на уровне выбора модели (куда входит не только модель среды, но и модель экспериментального материала) может происходить их объединение, тем более что при разработке алгоритма решения интерпретационной задачи просто необходимо учитывать особенности как структуры реальной среды, так и наблюдаемых данных.



a



b

Рис. 3.3. Применение математических методов в решении обратных задач геофизики:

a – на первом этапе; *b* – на втором этапе развития

Таким образом, с некоторой условностью используемые в развитии геофизических исследований на двух указанных этапах математические методы решения обратных задач геофизики можно представить

диаграммами, изображенными на рис. 3.3. Они дают представление и о некоторых основных областях прикладной математики, которые оказались исключительно полезными при развитии обратных задач геофизики. Поэтому соответствующим методам уделяется такое большое внимание при подготовке специалистов-геофизиков.

Кроме двух представленных направлений, в последнее время активно развиваются и промежуточные по отношению к ним подходы в решении обратных задач. Они связаны с понятием продолжения поля, где может происходить объединение нескольких математических способов решения задач, к примеру, с использованием различных асимптотических методов (лучевого, краевых волн и др.) и методов интегральных уравнений (сейсмическая томография, продолжение поля и др.).

3.3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Необходимо подчеркнуть, что нет строго определенной классификации методов интерпретации геофизических данных [2, 9]. Поэтому излагаемые ниже соображения о классификации этих методов являются некоторым частным восприятием автора настоящей работы. Они опираются на опыт его работы с представителями нефтяных компаний и практические проекты, в которых ему удалось поучаствовать, а также продиктованы желанием помочь студентам сориентироваться в имеющемся многообразии таких методов.

Кроме высказанных выше соображений о классификации обратных задач геофизики, решение которых направлено на определение параметров моделей сред и, следовательно, имеет непосредственное отношение к интерпретации, представляется целесообразным упорядочивать методы – от структурных особенностей строения среды к ее петрофизическим характеристикам. При этом структурные особенности могут создавать некоторый каркас, в который вкладываются определенные типы пород, процессы их формирования и преобразования, а также петрофизические характеристики. Простым примером такого интерпретационного построения служит рис. 3.4, где временной разрез определяет структуру погружения, а скважинное исследование пород, заполняющих погружение, позволяет идентифицировать их типы и выполнить идентификацию отражений от горизонтальных контрастных границ раздела среды. Всё вместе создает условия для построения образа и геологической модели данного участка среды.

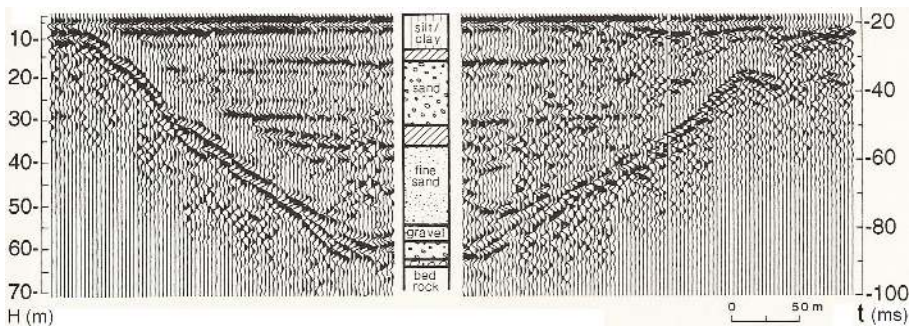


Рис. 3.4. Временной разрез верхней части среды, построенный по продольным отраженным волнам, с геологической колонкой, показывающей типы пород (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

Структура модели создается на основе выделения контрастных элементов, присутствующих в геофизических данных, и их трассировки (последовательного выделения) по совокупности таких данных, располагающихся на линиях или плоскостях наблюдения, а также в пространстве. Контрастными элементами могут являться короткие сигналы, резкие изменения в данных (скачки) или устойчивые части наблюдения, сохраняющие свои особенности для некоторой группы наблюдений. Достаточно часто для выделения и трассировки таких элементов используется взаимно корреляционная функция, а также функция когерентности (см. разд. 2.1).

По выделенным контрастным элементам и соотносящимся с ними параметрам строятся карты их распределения (расположения) по пространству. Когда между контрастными элементами, выделяемыми в геофизических данных, и характеристиками пород, слагающих среду, могут быть установлены некоторые связи, то построенные карты позволяют определить распределение соответствующих характеристик в среде. Далее через процедуры классификации и распознавания на основе качественных и количественных признаков с использованием полученных характеристик устанавливаются образы геологических объектов.

Представленная интерпретационная схема, основанная на контрастных элементах, является наиболее традиционной и одной из основных в практике геофизических исследований. В сейсмических методах контрастные элементы обычно представляют собой короткие сигналы, которые связываются с волнами определенной природы.

Такие волны часто соотносятся с границами раздела среды или источниками фиксированного типа. Время распространения соответствующих сигналов в среде позволяет определять скоростные и глубинные характеристики, а на основе их амплитуд определяются характеристики контрастности и поглощения сейсмической энергии в среде. Указанные характеристики предполагают однородность и упругость среды распространения сигналов. В этом случае их интерпретация дает достаточно хорошие результаты, особенно в тех случаях, когда удастся установить корреляционные связи (калибровку) между сейсмическими параметрами и характеристиками среды по результатам бурения [2, 13]. Для более сложных моделей сред, где такие предположения не выполнены, ошибки интерпретации могут быть очень значительными. Примером служат результаты, полученные для Кольской свехлубокой скважины.

Приведенные рассуждения подчеркивают важность использования полигонов и обучающих выборок в процессе интерпретации, что связано с методом палеток в решении обратных задач (см. разд. 3.2). В этом подходе для некоторых типичных геолого-геофизических моделей, включающих элементы строения среды и свойства пород, рассчитываются физические поля (решается прямая задача). Они представляются в виде альбомов теоретических кривых, с которыми проводится сопоставление наблюдаемых геофизических величин. Из этих сопоставлений делаются выводы и прогнозы относительно модели изучаемой среды.

Здесь существенным является то, что рассматриваются и сравниваются альтернативные интерпретационные модели. При их значительном расхождении по геологическим и геофизическим параметрам, но в рамках относительно небольших расхождений с данными может ставиться вопрос о получении дополнительной информации через бурение или использование других геофизических методов. Еще одним значимым моментом интерпретации, обеспечивающим точность ее выводов, служит комплексирование различных геофизических методов. При этом согласно приведенным особенностям методов (см. разд. 3.1) можно достигать решения поставленной геологической задачи в случае сложных контуров рудных и дайкообразных тел, проникающих в осадочные породы, сложной блоковой тектоники и пр. Это бывает важно при анализе сложно построенных сред, содержащих нефте- и газонасыщенные коллекторы, или при отсутствии результатов бурения, контролирующих достоверность построенных моделей. Иллюстрацией служит пример рис. 3.5, доказывающий, что совместное

использование гравиметрических и сейсмических данных может обеспечить высокую точность структурных построений.

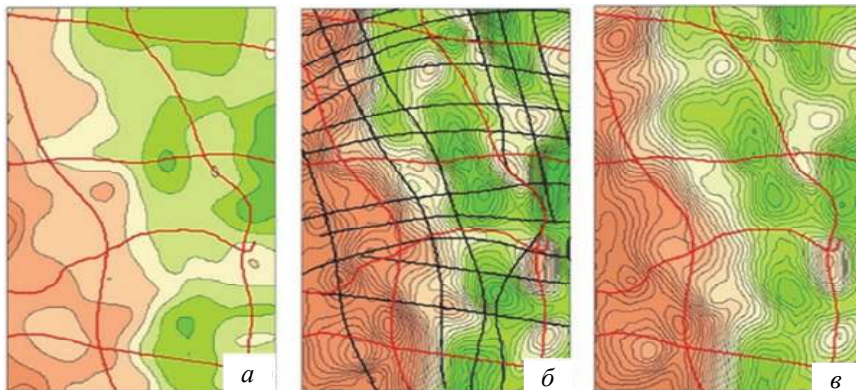


Рис. 3.5. Построение структурной карты целевого горизонта по детальной (б) и редкой (а) сети сейсмических профилей с гравиметрическими данными (в) (пример ОАО «Баженовская геофизическая экспедиция»)

Можно также отметить многоэтапность процесса интерпретации, когда происходит последовательное уточнение строящихся геологических моделей. Значимую роль здесь играет опыт интерпретатора, который накапливается в течение длительного времени при работе с различными геофизическими данными и целевыми объектами среды. Такой опыт почти не поддается полной формализации и составляет систему уникальных знаний.

3.4. ВЛИЯНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАБОТКИ НА ИНТЕРПРЕТАЦИЮ

Оно носит принципиальный характер и определяет как точность, так и детальность построенных интерпретационных моделей. Поэтому на протяжении всего развития геофизических методов исследования Земли предъявляются очень высокие требования к качеству обработки. Это служит стимулом для создания новых аппаратных и программных разработок, а также для развития теоретических и алгоритмических основ геофизики.

О важности таких разработок говорят результаты, отображенные на рис. 3.6, где показаны образы среды, полученные с использованием

одних и тех же сейсмических данных, но с применением различных методов обработки. Данные были получены с использованием современных 3D-наблюдений, обладающих высокой плотностью источников и приемников. Система наблюдений располагалась в районе соляного купола, обладающего сложным геологическим строением. В процессе обработки двух представленных вариантов использовались одинаковые процедуры, позволившие получить суммарные временные разрезы, которые затем были подвергнуты двум разным процедурам миграции: временной и глубинной. Как видно, в первом варианте происходит неточное отображение образа среды с возможной потерей прослеживаемости отмеченных целевых горизонтов, а также их структуры с областями выклинивания. Всё вместе существенно исказило бы структурные карты и повлияло на определение возможных резервуаров углеводородов. Несмотря на существенный факт улучшения структурного образа среды, у процедуры глубинной миграции имеется одна особенность, которая может оказывать отрицательное влияние на интерпретацию. Она состоит в том, что применение этой процедуры может изменять форму сигнала.

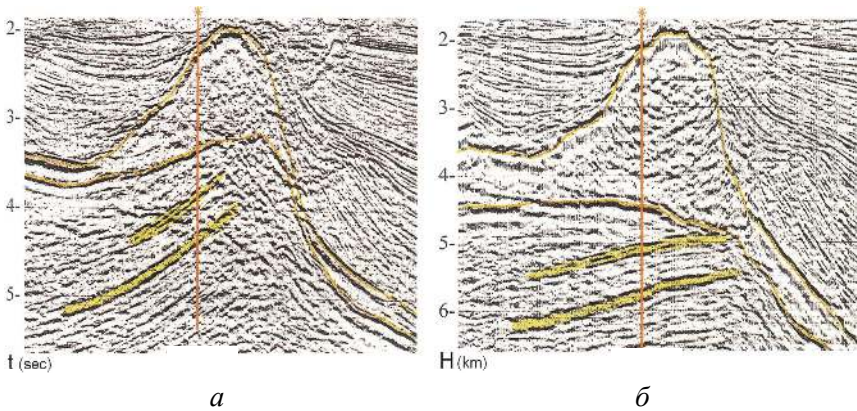


Рис. 3.6. Временной (а) и глубинный (б) разрезы по одной из линий 3D-наблюдений, полученные соответственно на основе временной и глубинной миграции после суммирования (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

Приведенный пример демонстрирует влияние только одной (хотя и существенной) процедуры обработки. Современные же процессы могут включать 20...30 различных процедур, обеспечивающих различные результаты. Поэтому можно представить, насколько неоднозначными

могут быть окончательные варианты. В одной нефтяной компании автору показывали структурные карты по целевому горизонту, построенные тремя различными геофизическими фирмами. Эти карты кардинально отличались одна от другой. У нефтяной компании возникал естественный вопрос о доверии к полученным результатам. Еще более интересный пример получаемых различий обработки одних и тех же сейсмических данных показан на рис. 3.7. Такие различия свидетельствуют о высокой сложности решаемых задач, которая проявляется в проблеме как выбора процедур обработки, так и их параметров. Они же указывают на неединственность определения сигналов и построенных образов. Это усугубляется требованиями к детализации выполняемых построений при использовании поверхностных данных.

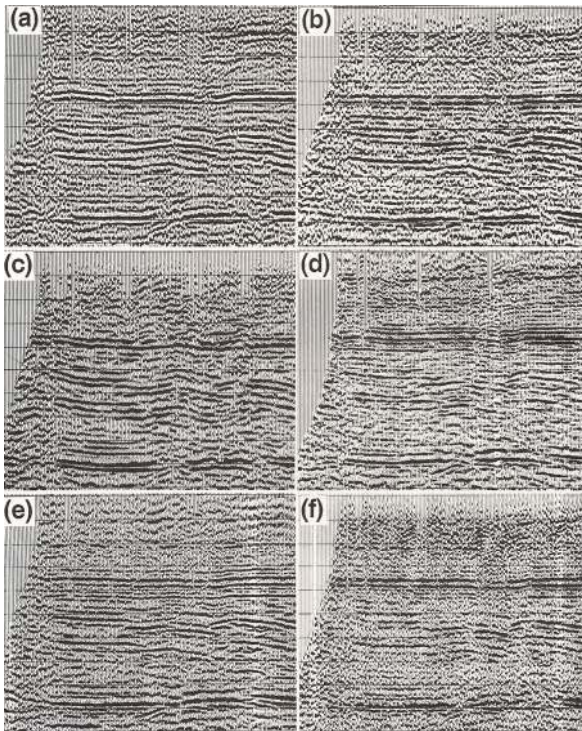


Рис. 3.7. Окончательные результаты обработки, представленные шестью различными компаниями (пример взят из книги Yilmaz, 2001)

Нефтяные компании хотели бы получать результаты обработки и прогноза коллекторских свойств целевых горизонтов с высокой точностью. В структурных построениях это должно составлять метры при глубинах в несколько километров, при небольших вариациях скоростных характеристик – в несколько процентов. Но такие требования находятся в области неопределенности для большинства реальных сред.

3.5. АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Применение такой информации позволяет понизить неединственность и существенно повысить точность интерпретационных построений. Эта связь совершенно очевидна. Когда мы имеем полную информацию об изучаемом объекте, то он может быть полностью определен и абсолютно точно восстановлен. Но все определяется стоимостью получения такой информации. Для исследуемых геолого-геофизических объектов стоимость огромна и, вероятно, не соизмерима с той пользой, которую может принести их изучение. Поэтому нам приходится минимизировать стоимость требуемой априорной информации, обеспечивающей наилучшее решение поставленной задачи. Уже из этого следует, что требуемая априорная информация, как и ее вид, определяется конкретной задачей. Одним из примеров служат результаты, представленные на рис. 3.5, где гравиметрические данные могут выступать в роли априорной информации для редкой системы сейсмических профилей.

Другим примером служит априорная структурная модель среды, которая используется как базовая для расчета первых приближений полученных геофизических данных. Эти данные служат для линейризации в решении обратной задачи или устранения трендовых регрессионных составляющих (см. разд. 2.5). При сейсмических методах на ее основе может быть реализован лучевой метод (рис. 3.8), обеспечивающий целый спектр решаемых задач. Приведем только некоторые из них: моделирование сейсмических волновых полей и отдельных сигналов, оптимальное планирование сейсмического эксперимента, идентификация целевых объектов в сложно построенных моделях среды (блоки, криволинейные границы и пр.), а также как вспомогательное средство и начальное приближение для устойчивости решения обратных задач сейсмоки.

Для иллюстрации прикладных возможностей лучевого метода при реализации различных элементов схемы (рис. 3.1) рассмотрим рис. 3.8. Здесь показано, как на его основе в наблюдаемом сейсмическом волновом поле идентифицируются и выделяются волновые объекты, относящиеся к различным локальным элементам среды в случае ее сложного строения (рис. 3.8, *a*). Такая идентификация может оказаться существенной при выполнении обработки и интерпретации данных. На второй части рисунка показано, каким образом метод позволяет учесть сложность построения среды при планировании полевых работ. В левой части рис. 3.8, *б* показаны распределения количества общих глубинных точек (ОГТ), приходящихся на участки отражающей границы, при горизонтально-слоистой модели среды, а в правой части рисунка дано распределение этих точек в случае сложного строения отражающей границы.

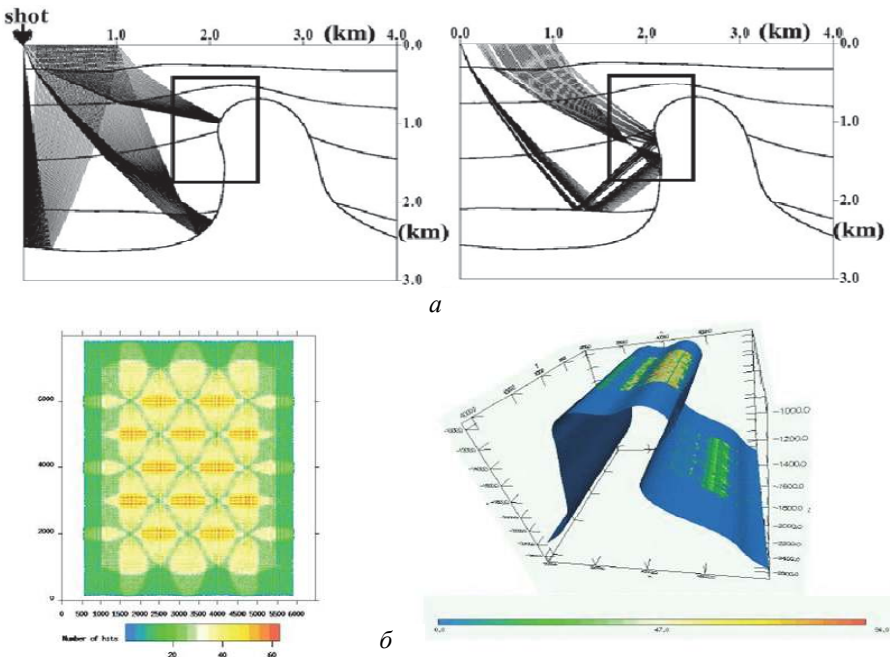


Рис. 3.8. Приложения лучевого метода (примеры взяты из Интернета)

В качестве примера определения требуемой априорной информации и оптимизации ее объема рассмотрим следующий модельный эксперимент. Его общая картина представлена на рис. 3.9.

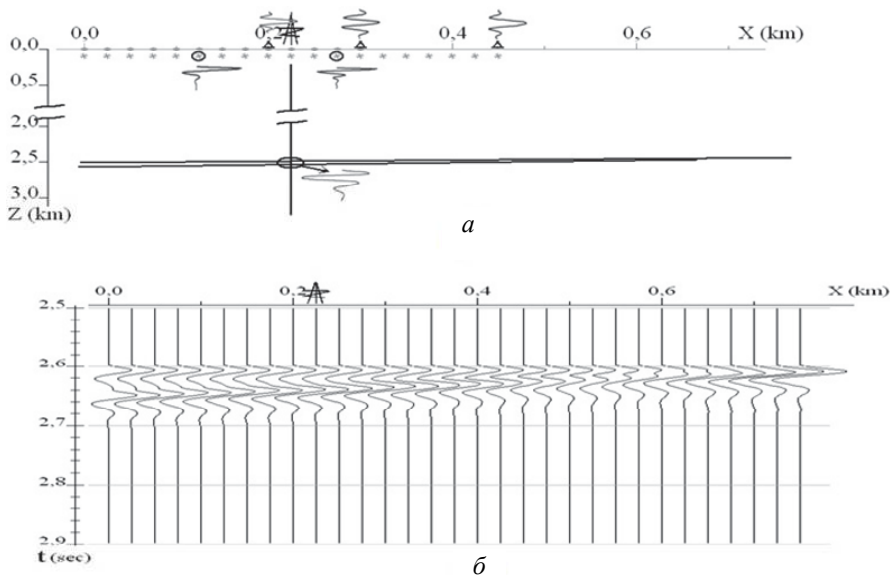


Рис. 3.9. Модельный эксперимент:

a – схема эксперимента; *б* – часть временного разреза с отраженным сигналом от целевого горизонта

Здесь показаны структура модели среды и положение источников. Модель среды носит упрощенный характер и состоит из верхнего мощного, однородного покрывающего слоя и целевого объекта в виде тонкого выклинивающегося слоя. Несмотря на простую структуру модели, она отвечает реальной сейсмогеологической задаче, направленной на изучение области выклинивания целевого горизонта реального месторождения «Альбокора» (шельф Бразилии).

В рамках заданной модели были рассчитаны синтетические сейсмограммы для системы наблюдений, содержащей 19 источников. Каждому источнику отвечала расстановка, содержащая 13 приемников. На рис. 3.9, *a* показана расстановка, отвечающая первому моделируемому источнику. Расстояние между источниками и приемниками составляло 25 м. При этом первый приемник располагался над источ-

ником. Вид полной системы наблюдений на двумерной плоскости (источник, приемник) представлен на рис. 3.11.

В простейшем случае, когда условия возбуждения и приема являются идеальными, т. е. условия приема постоянны, а во всех источниках задана одна и та же форма сигнала $s(t)$, наблюдаемый отраженный сигнал от целевого горизонта имеет вариации формы сигнала, связанные только с особенностями строения целевого горизонта. Это хорошо видно на рис. 3.9, б.

При вариациях характеристик источников и приемников изменения формы сигнала могут быть существенными (см. разд. 2.9). Для моделирования такой ситуации при расчете сейсмограмм в источнике задавался свой импульс, т. е. $s_i(t)$. Примеры двух импульсов для 6-го и 12-го источников показаны на рис. 3.9, а. Также при моделировании учитывалось изменение импульсных характеристик отдельных приемников, т. е. $r_j(t)$. На рис. 3.9, а показаны примеры характеристик приема для трех таких областей: 9, 13 и 19. Значимость получаемых изменений формы отраженного сигнала видна из сопоставления соответствующих сигналов (рис. 3.9, б и 3.10). Очевидно, что такие изменения будут играть существенную роль при интерпретации и решении обратных задач.

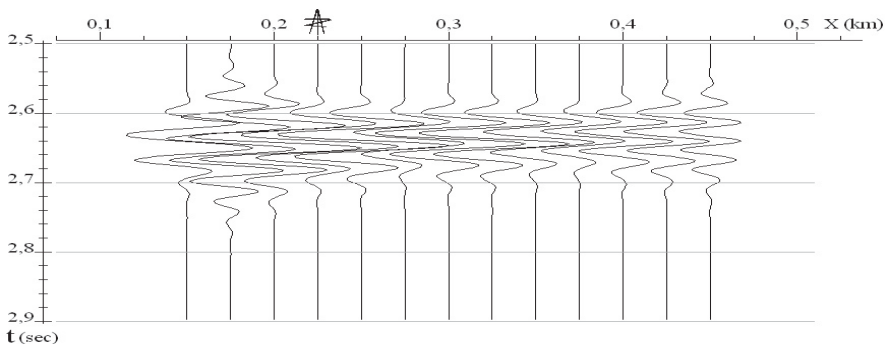


Рис. 3.10. Трассы с отраженным сигналом от целевого горизонта для нулевого удаления источник–приемник на обрабатываемом участке профиля

Показанные на рис. 3.10 импульсные характеристики источников и приемников одновременно являлись и априорной информацией для данного эксперимента, т. е. предполагалось, что их удалось определить на основе дополнительных исследований. В рамках эксперимента

также предполагалось, что в точке профиля с координатой 0,225 км расположена скважина, позволяющая определить импульсную характеристику для зоны отражения от целевого горизонта при нормальном падении волны в данной точке, т. е. $L_{i+j}(t)$ для соответствующей точки в выражении (2.29).

При обработке использовалась модель (2.30) поверхностно-согласованной фильтрации. Используемая модель обеспечивала хорошее приближение для отраженного сигнала в рассматриваемом модельном эксперименте. Это позволяло с высокой точностью выполнить декомпозицию формы моделируемых сигналов, что гарантировало и высокую надежность при проверке эффективности использования априорной информации. Отметим, что для более сложных моделей среды требуется применение усложненного описания импульсной характеристики отражения, а такое усложнение влияет на объем и вид требуемой априорной информации.

В процессе декомпозиции использовалась линеаризованная модель (2.31) и решалась соответствующая система линейных уравнений, определяемая совокупностью наблюдений, которые выделены на рис. 3.11. При изображении отобранных наблюдений на этом рисунке даны два вида представления исходной многократной системы. Первый вид (рис. 3.11, а) является классическим и наиболее часто используется в зарубежной литературе. Второй вид (рис. 3.11, б) традиционен для российских специалистов и, по мнению автора, лучше отвечает задаче определения составляющих сигнала, характеризующих его изменения от положения ОЦТ и удаления источник–приемник. Комментарии к формированию этих представлений и их различиям имеются в книге [13].

Согласно выражению (2.31) при декомпозиции нам требуется найти значения неизвестных параметров: $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i+j}, \lambda_{i-j}$ на каждой фиксированной частоте ω . Такая задача не имеет единственного решения. Из анализа неоднозначности следует, что невозможно определение параболических составляющих каждого из указанных параметров. Таким образом, для четырех искомых параметров нам необходимо иметь дополнительно 12 спектральных характеристик по три на каждый из параметров: $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i+j}, \lambda_{i-j}$. Однако математическое исследование соответствующей регрессионной модели (см. разд. 2.4) позволяет сократить их число до шести. При этом требуемые спектральные характеристики могут отвечать только трем из указанных факторов

следующим образом: три отвечают одному из факторов, две – другому и одна – третьему.

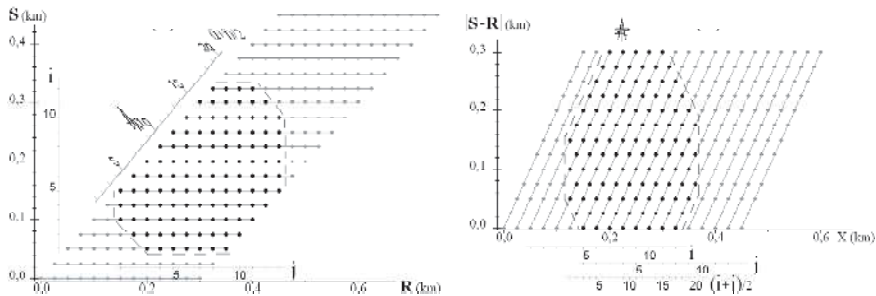


Рис. 3.11. Отбор наблюдений, используемых при декомпозиции формы сигнала:

a – представление в координатах источников и приемников; *б* – представление в координатах удалений источник–приемник и линии профиля

Таким образом, можно воспользоваться указанными выше тремя импульсными характеристиками приема, двумя импульсными характеристиками источников и одной импульсной характеристикой отражения в точке, где расположена скважина. Результаты такого использования априорной информации позволяют точно определить характеристику отражения от целевого горизонта, что следует из рис. 3.12. Сопоставление этих сигналов показало их высокое совпадение с истинным отраженным сигналом от целевого горизонта (см. рис. 3.9, б).

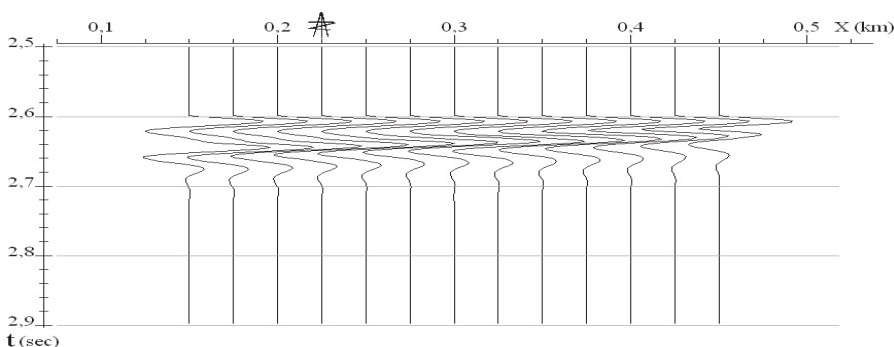


Рис. 3.12. Трассы с отраженным сигналом от целевого горизонта, полученные после декомпозиции формы сигнала с учетом априорной информации

Проведенный модельный эксперимент демонстрирует значимость использования априорной информации и необходимость исследования вопросов ее эффективного применения. Так, для рассматриваемого алгоритма предложена схема, реализующая двухшаговый процесс введения требуемой информации.

Первый шаг выполняется достаточно формально, как некоторое математическое преобразование данных, обладающее высокой устойчивостью, без рассмотрения вопросов о возможности получения априорной информации и постановке дополнительных полевых исследований. На втором же шаге решение требуемых вопросов может быть получено исходя из возможностей проведения дополнительных исследований. Например, в выполненном эксперименте использовалась информация о трех импульсных характеристиках приемников и двух источниках. Но если бы имелся достаточный объем скважинной информации, то основные априорные данные можно было бы получить на ее основе, уменьшив количество исследований, связанных с изучением условий возбуждения и приема.

В качестве небольшого заключения можно сделать утверждение, что чем сложнее задача и чем выше требование к точности ее решения, тем больше внимания нужно уделять вопросам получения и эффективного использования априорной информации. В конечном итоге это может существенно повысить реализацию всего проекта и сократить финансовые затраты, требуемые для его реализации. Здесь нужно иметь в виду, что априорная информация может получаться не только при проведении натурных исследований, но также в модельных построениях, включая физическое моделирование.

ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

Задания для самостоятельной работы

1. Постарайтесь сформулировать (представить), в каком разделе (ракурсе) интерпретации геофизических данных могли бы использоваться результаты проводимых вами исследований.

2. Постарайтесь определить интерпретационную постановку решаемой вами задачи.

3. Сможете ли вы указать методы решения прямых и обратных задач, которые применяются в известных вам интерпретационных пакетах?

4. Имеются ли в вашей задаче характерные признаки обратной задачи: неединственность решения и прочее? Если имеются, то каким образом они могут быть устранены.

5. Как вы представляете использование априорной информации в исследованиях, проводимых вами или вашими коллегами? Сможете ли вы оценить ее значимость и влияние на получаемые результаты?

6. Постарайтесь охарактеризовать используемые вами интерпретационные комплексы с точки зрения комплексирования геофизических данных (один тип данных и моделей среды или разнородные данные со сложными моделями).

Примеры контрольных вопросов

1. Основные элементы постановки и выполнения геофизических исследований.

2. Связь методов обработки с решаемой геофизической и геологической задачей.

3. Интерпретационная обработка данных.

4. Оценка эффективности проведенной обработки данных, используемых в интерпретационных комплексах.

5. Принципы, положенные в основу интерпретации геофизических данных.

6. Общая характеристика методов интерпретации.

7. Использование методов решения прямых и обратных задач при интерпретации геофизических данных.

8. Виды априорной информации, применяемые при интерпретации геофизических данных.

9. Комплексная интерпретация геофизических данных и ее виды.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Гольдин С.В.* Линейные преобразования сейсмических сигналов. – М.: Недра, 1974.
2. *Ежова А.В.* Геологическая интерпретация геофизических данных: учеб. пособие. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2012.
3. *Никитин А.А.* Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986.
4. *Троян В.Н.* Анализ и обработка данных / В.Н. Троян, Ю.В. Киселев. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010.
5. *Хаттон Л.* Обработка сейсмических данных. Теория и практика / Л. Хаттон, М. Уэрдингтон, Дж. Мейкин. – М.: Мир, 1989.

Дополнительная литература

6. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.
7. *Бат М.* Спектральный анализ в геофизике. – М.: Недра, 1980.
8. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005.
9. *Гурвич И.И.* Сейсмическая разведка: учебник для вузов / И.И. Гурвич, Г.Н. Боганик. – 3-е изд., перераб. – М.: Недра, 1980.
10. *Джонсон Н.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке (методы обработки данных) / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1980.
11. *Торге В.* Гравиметрия / В. Торге. – М.: Мир, 1999.
12. *Jones E.J.W.* Marine geophysics. – John Wiley & sons, LTD, 1999.
13. *Yilmaz O.* Seismic Data Analysis: Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data (Vols. 1 & 2). – Society of Exploration Geophysicists: Tulsa Oklahoma, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

На протяжении XX века математика существенно изменялась, перестраивая свои основы. Возможно, это было связано с развитием отдельных разделов математики, причем настолько значительным, что математики, работающие в различных областях, переставали понимать друг друга. Может быть, это определялось и активным проникновением математических методов анализа данных в другие науки, где математикам приходилось работать с различными объектами, часто существенно отличающимися от традиционных математических объектов. В результате математика пришла к теоретико-множественной основе, где важную роль играют описание элементов множеств и операций над ними. Несмотря на весь формализм этих понятий, изначальная идея их введения является простой и здоровой. Она состоит в том, что объекты, с которыми нам приходится работать, должны быть точно и полностью определены. Идея, первоначально осознанная математиками, была воспринята и в других областях знаний, даже там, где отсутствовал достаточный формализм и значительная математизация.

Таким образом, исходным понятием является множество объектов или элементов, с которыми приходится работать или иметь дело. Описание всего множества может начинаться с отдельных элементов, обладающих определенными свойствами, характеристиками, параметрами. При переходе к описанию всего множества производится систематизация свойств, характеристик и параметров отдельных элементов. В результате получают их обобщения, которые и определяют данное множество. Указанный индуктивный подход представляется наиболее типичным при изучении природных объектов или явлений. Но возможен и дедуктивный подход. В нем первоначально определяют свойства, характеристики и параметры элементов множества, а затем для определенного объекта или элемента проверяется их соответствие. Если такое соответствие устанавливается, то элемент включается в заданное множество. Дедуктивный подход ближе к математическому восприятию. Существенное отличие двух подходов состоит в том, что при индуктивном подходе множество содержит хотя бы один элемент, во втором же случае требуется проверка на непустоту множества.

После определения множества, т. е. всех его элементов, можно устанавливать операции над ними. В математическом плане часто такие операции определяются в форме функций, которые позволяют соотносить между собой как элементы из одного множества, так и элементы из других множеств. Это создает основу для объединения математических объектов с объектами из других областей знаний. В частности, удается эффективно использовать понятие числа, принадлежащего различным числовым множествам.

Одной из таких функций, определяемой на большом количестве различных множеств, является понятие расстояния (метрики) между объектами одного множества или разных множеств. Формальное определение такого понятия вводится следующим образом. Пусть M – заданное множество объектов. Тогда определим над любыми двумя объектами x и y , принадлежащими M , т. е. $x, y \in M$, функцию расстояния (метрику) $d(x, y)$, значения которой являются действительными числами, а сама функция удовлетворяет трем аксиомам.

1. **Неотрицательность:** $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0$ только для $x = y$, т. е. при полном совпадении элементов множества M .

2. **Симметричность:** $d(x, y) = d(y, x)$.

3. **Неравенство треугольника:** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ при $z \in M$.

Множество с определенной над его элементами метрикой называется метрическим пространством.

Отметим, что расстояние (метрика) определяется не только между элементами множества, но и между некоторой точкой $a \in N$, которая может принадлежать другому множеству, и всем множеством M . Это осуществляется путем определения наименьшего расстояния от этой точки до каждого элемента M , т. е. $d(a, M) = \inf_{x \in M} d(a, x)$. Из этого сле-

дует, что может быть определено и расстояние между двумя множествами. С практической точки зрения указанное следствие представляется очень важным. Например, множество решений прямой задачи может и не совпадать с множеством наблюдаемых данных, но с помощью соответствующей метрики появляется возможность производить сравнение элементов различных множеств. Более того, можно минимизировать расстояние и найти решение прямой задачи, которое является ближайшим к наблюдаемым данным. Правда, с одной оговоркой, что не существует других множеств решений прямой задачи, обеспечивающих большую близость к полученным данным.

Введенное понятие расстояния (метрики) позволяет охарактеризовать размер (диаметр) множества, производить упорядочивание элементов множества или изучать геометрические свойства, существующие внутри множества или между множествами. Поэтому оно является важным для современного математического анализа и аналитической геометрии.

С утилитарных позиций нам не обязательно знать все теоретические построения, но важно понимать, что могут быть предложены разнообразные метрики, обладающие различными характеристиками. Примеры метрик имеются в справочной математической литературе. Они относятся к множествам как дискретной, так и непрерывной структуры. Остановимся на трех из них, которые будут полезными при работе с элементами множеств, представимыми наборами чисел. Как указывалось выше (см. разд. 1.3), современные геофизические данные обычно представляются в таком виде.

Итак, пусть элемент множества M имеет вид $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где x_i являются действительными числами (хотя имеется возможность их обобщения и на множества других чисел, например комплексных). Теперь определим три следующие метрики:

$$\begin{aligned}
 d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \\
 d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \\
 d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

В математических курсах имеются доказательства справедливости аксиом 1–3 для каждой из метрик. Нам же будет интересна интерпретация и соотношение указанных метрик. Исходя из привычных геометрических образов (катетов и гипотенуз), для метрики d_1 получаем сумму расстояний по катетам, для d_2 – длину гипотенузы (или радиуса) в n -м пространстве, а для d_3 – длину максимального катета. Эти образы подсказывают и справедливость следующих соотношений:

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Указанные геометрические образы дают возможность понять и такое утверждение. Если элемент \mathbf{z} расположен ближе к элементу \mathbf{x} , чем к элементу \mathbf{y} в случае метрики d_1 , т. е. $d_1(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < d_1(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, то это же соотношение сохранится и в случае метрики d_2 . Приведенное утверждение имеет большое практическое значение при решении обратных задач с использованием методов минимизации функционалов (см. разд. 3.2), построенных на основе метрик. Так, для некоторых задач метрика d_1 может давать улучшение структуры функционала и качества определения его минимума. При этом можно быть уверенным, что полученный минимум будет отвечать и минимуму функционала в метрике d_2 .

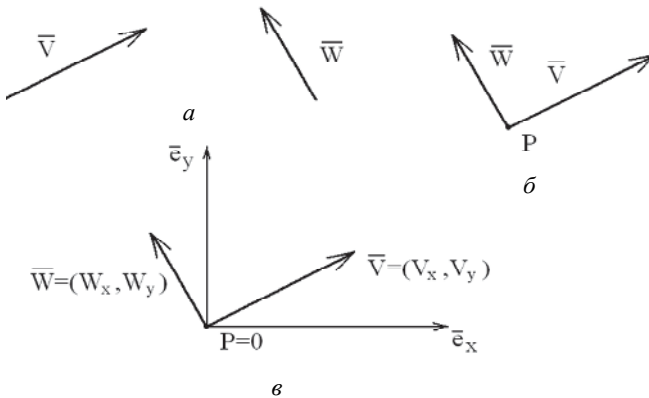
ВЕКТОРНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Общая алгебра и ее подраздел – линейная алгебра – еще в начале XX века считались высоко абстрактными математическими предметами. Но активное использование векторных представлений в инженерных задачах, развитие методов статистического регрессионного анализа в самых различных областях знаний, широкое использование матриц при решении прикладных задач и многое другое способствовало осознанию важности алгебраических понятий. У нас нет необходимости их детального рассмотрения, что является прерогативой соответствующих математических курсов. Поэтому остановимся только на некоторых прикладных особенностях объектов, связанных с линейной алгеброй. Такие особенности могут играть исключительно важную роль для современных способов обработки геофизических данных.

Понятие вектора. Много различных определений может быть использовано для понятия *вектор*. Оно вводится в курсах физики, математики, программирования, графики и многих других. Собственно термин «вектор» был впервые предложен Гамильтоном. Не останавливаясь подробно на всех определениях, отметим только, что важно ясно понимать похожесть этих понятий и их различие. Например, при исследовательском программировании на базе хорошо известного вычислительного окружения MatLab вектором является обыкновенный одномерный массив дискретных значений, представляющий сигнал или некоторую функцию. Такое определение используется в представлении геофизических данных или математических объектов. Однако физикам и инженерам нравится развивать это понятие при его применении. Для физического понятия вектора важно иметь начало или исходную точку вектора, его длину и направление. Как только объекты наделяются величиной и направлением, то их можно изображать стрелками на плоскости, создающими наглядные образы. Такое представление вектора дает возможность лучше понять многие физические характеристики: смещение, скорость, ускорение, силу и т. д. Например, скорость ветра – вектор, потому что он дует со своей скоростью и со своим направлением, также гравитация является вектором с направлением гравитационной силы к центру Земли и скалярной компонен-

той 9.8 м/с^2 . В результате обеспечивается лучшее понимание многих физических законов, процессов и инженерных построений. Одновременно подчеркивается различие между вектором и скалярным значением, что может быть важно во многих случаях.

На рисунке, *а* показаны две черные стрелки \mathbf{v} и \mathbf{w} , которые могут характеризовать некоторые физические величины. Каждая из этих величин может иметь свой собственный смысл. Сложно воспринимать их совместно и выполнять общие операции с этими величинами. На рисунке, *б* эти стрелки имеют общую начальную точку P . Тогда можно просто задать геометрический образ суммы векторов, и получаем некоторую начальную позицию для изучения векторов на плоскости. Такой метод суммирования векторов иногда называют правилом параллелограмма, так как $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ является диагональю параллелограмма, а \mathbf{v} и \mathbf{w} его сторонами.



Различные виды представления векторов в физических дисциплинах:

а – два вектора с величиной и направлением; *б* – оба вектора с общей начальной точкой; *в* – векторы с системой координат

Условия для работы с физическими векторами улучшаются при определении некоторой системы координат, задаваемой единичными базисными векторами (рисунок, *в*). Как правило, такие векторы задают ортогональные направления. На их основе могут быть построены все другие векторы, представимые через определенную сумму базисных векторов. Так, на рисунке, *в* имеются два базисных вектора \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , а векторы \mathbf{v} , \mathbf{w} ,

представимы в виде $\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{e}_x + v_y \cdot \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{w} = w_x \cdot \mathbf{e}_x + w_y \cdot \mathbf{e}_y$. При этом v_x, v_y, w_x, w_y являются скалярными или координатными проекциями векторов \mathbf{v}, \mathbf{w} на базисные векторы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$, а векторы \mathbf{v}, \mathbf{w} можно представить их собственными координатными проекциями как $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ и $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$. Тогда сумма векторов может быть определена следующей формой: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y)$. Последние рассуждения объединяют два понятия векторов в физическом и математическом смыслах.

В дополнение к указанной операции сложения векторов в курсах физики вводятся и другие операции с векторами. Некоторые из них эквивалентны математическим операциям в линейных пространствах (например, *скалярное произведение* двух векторов, рассматриваемое в дальнейшем). Но имеются и операции иного рода. Так, *векторное произведение*, определяемое в курсах физики, отличается от скалярного произведения тем, что его результатом является не число, а вектор. Более того, если исходные два вектора расположены в какой-то плоскости, то результат векторного произведения не расположен в этой же плоскости, а перпендикулярен ей. При этом всё, что было указано выше относительно векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} как элементов линейных пространств, может быть непосредственно обобщено на размерности большие, чем три, но векторное произведение имеет смысл только в трехмерном пространстве. Поэтому векторы в физическом смысле не всегда отвечают элементам линейных пространств.

Формальное определение вектора. Оно ближе математической точки зрения. Но даже для этой позиции вначале требуется прояснить несколько вещей и понятий. Часто в приложениях вектор представляется как последовательность некоторых элементов, оформленных в виде строки или столбца. В то же время в формальном смысле вектором считается некоторый элемент *линейного пространства* L . Такое определение позволяет включать в абстрактные линейные пространства, называемые также векторными пространствами, элементы различной природы – математической или любой другой. Так, матрицы и полиномы удовлетворяют правилам линейных пространств и в этом смысле являются векторами. Кроме того, концептуальное понимание линейных пространств может быть использовано при представлении различных механических систем. Представление различных систем через

линейные пространства часто дает возможность изучать их важные свойства и, таким образом, проникать в сущность изучаемого предмета.

Одновременно необходимо помнить, что имеется возможность определения многих других пространств, которые не полностью удовлетворяют свойствам линейного пространства. Кроме того, многие привычные операции не имеют определения в линейном пространстве. Одной из наиболее очевидных является операция произведения между элементами пространства, которая не определена для линейного пространства.

Поэтому важно определить свойства линейного пространства. Они основаны на двух базовых алгебраических операциях. Первая операция – *сложение векторов*. Если \mathbf{x} и \mathbf{y} – два вектора в L , т. е. $\mathbf{x} \in L$ и $\mathbf{y} \in L$, тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ является вектором, т. е. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ эта операция удовлетворяет следующим аксиомам.

1. **Коммутативность:** $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2. **Ассоциативность:** $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

3. **Прибавление нуля или существование нулевого (тождественного) элемента:** такой элемент $\mathbf{0} \in L$, называемый нулевым вектором, обладает свойством, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

4. **Обратный элемент:** для любого \mathbf{x} существует $-\mathbf{x}$, называемый отрицательным суммируемым элементом к \mathbf{x} , такой, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Таким образом, любая операция над элементами некоторого пространства может быть названа суммированием векторов, если она удовлетворяет указанным аксиомам. Нам же необходимо только проверить их справедливость для нее. Несомненно, что вначале соответствующая операция должна быть описана, т. е. объяснено ее выполнение, как это сделано выше в «правиле параллелограмма» для физических векторов.

Вторая операция – *умножение вектора на скаляр*, где скаляр – это элемент из поля скаляров \mathbf{S} . Определение числового поля скаляров (реальных и комплексных чисел), которое дается в базовых курсах математики, является исключительно важным. Но нам нет необходимости на нем останавливаться. Поэтому перейдем к аксиомам, которым удовлетворяет рассматриваемая операция. Если $r, s \in \mathbf{S}$, тогда для всех элементов линейного пространства L будет справедливо, что $r\mathbf{x} \in L$ и $s\mathbf{x} \in L$.

5. Ассоциативность скалярного умножения: $r(sx) = (rs)x$.
6. Дистрибутивность скалярной суммы: $(r + s)x = rx + sx$.
7. Дистрибутивность векторной суммы: $r(x + y) = rx + ry$.
8. Тожественность скалярного умножения: $1x = x$.

Полный набор аксиом 1–8 и поле скаляров S задают нам линейное пространство. Поэтому еще говорят о векторном пространстве L над полем S , что еще раз подчеркивает ключевую роль знания о скалярном поле для понимания векторных пространств. В качестве скалярных полей наиболее часто используются поля реальных чисел и поле комплексных чисел. Будем обозначать их буквами R и C соответственно.

После общих определений возвращаемся к нашим специальным пространствам, когда элементы представляются в форме строки или столбца. Обычно используется вектор-столбец. Уже отмечалось, что такие векторы не обязательно должны быть элементами линейного пространства. Если же они являются элементами такого пространства, т. е. удовлетворяют аксиомам 1–8, то будем называть их элементами *векторного линейного пространства*, чтобы подчеркнуть специальную структуру элементов этого пространства. В приложениях особенно часто используются пространства, где каждый такой элемент представляет собой набор реальных или комплексных чисел, которые, в свою очередь, являются элементами скалярного поля. Следовательно, опять обращаем внимание на важность знаний о свойствах соответствующих полей. Они нам потребуются при работе с указанными векторными пространствами. В частности, необходимо хорошо понимать операции сложения и умножения элементов таких полей, знать, какие элементы являются единицей и нулем, а также как с ними работать.

В основной части курса обсуждалось, что для современных геофизических данных наиболее характерно представление в виде векторов. Векторы могут иметь различную структуру: от простой в форме одномерных массивов целых чисел со строгим заданием границ массивов до сложной с многомерными матрицами и комплексными числами. Примерами простых данных служат магнитные наблюдения (см. рис. 1.8, z) или морские гравиметрические измерения, рис. 1.5, а сложных данных – сейсмограммы, получаемые при 3D-наблюдениях. Однако все они могут быть представлены элементами линейных пространств, и для них будут выполнены приводимые ниже результаты. При этом необходимо

помнить о двух указанных операциях (сложение векторов и умножение на скаляр) и их восьми аксиомах.

Линейная комбинация векторов. Данное понятие может быть определено в любом линейном пространстве, так как оно полностью основано на свойствах этих пространств. Понятие является одним из наиболее используемых при изучении линейных пространств и их применении на практике. С его помощью вводится понятие линейно независимых векторов, которое играет ключевую роль в определении базиса линейного пространства.

В дальнейшем линейной комбинацией векторов будем называть сумму элементов линейного пространства с постоянными коэффициентами, расположенными перед каждым элементом. Коэффициенты принадлежат базовому цифровому полю. (Вне чистой математики обычно работают с полем действительных или комплексных чисел, но в алгебре и общей цифровой теории часто рассматриваются и абстрактные поля положительных характеристик.)

Рассмотрим линейную комбинацию трех векторов \mathbf{x} , \mathbf{y} , $\mathbf{z} \in L$. Она задается посредством $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}$, а результат этой суммы является вектором из линейного пространства L . Для иллюстрации могут быть взяты следующие постоянные коэффициенты: $a = 1.0$, $b = 0.5$, $c = 1.5$ и

векторы: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда их линейная комбинация

имеет вид: $1.0 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если операции сложения векторов и умножения на скаляр заданы по компонентам векторов, то результатом рассматриваемой линейной комбинации является следующий вектор $\mathbf{v} \in L$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 1.0 \cdot 1 \\ 1.0 \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 2 \\ 0.5 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \cdot 3 \\ 1.5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 2 + 1.5 \cdot 3 \\ 1.0 \cdot 5 + 0.5 \cdot 1 + 1.5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов. Еще одно важное понятие, которое потребует нам при дальнейших определениях базиса линей-

ного пространства. Скалярное произведение представляет собой некоторую операцию над двумя произвольными векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} , принадлежащими линейному пространству L . Результатом операции является скаляр. Она обозначается (\mathbf{x}, \mathbf{y}) и удовлетворяет следующим условиям.

1. **Дистрибутивность:** $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$.

2. **Ассоциативность по отношению к скалярному умножению:** $(s\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где s является скаляром из числового поля S .

3. **Перестановочность:** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для действительных чисел и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ для комплексных чисел, где $\overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ – комплексно-сопряженное.

4. **Положительности:** $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ и эквивалентности нулю только для $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Таким образом, введенное понятие определяет путь умножения векторов с получением результата в виде скаляра. Векторное пространство совместно со скалярным произведением называется скалярным пространством. Такое определение применимо и к абстрактному векторному пространству над любым полем (с учетом различий в свойстве 3).

В векторном линейном пространстве скалярное произведение обычно определяется как сумма произведений компонент векторов или покомпонентное произведение, т. е. если произвольный вектор n -мерного пространства представим в форме следующей строки $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ или соответствующего столбца, то скалярное произведение представимо как

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i -$$

$$\text{для действительных чисел и } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} -$$

для комплексных чисел, где $\overline{y_i}$ – комплексно-сопряженное. Просто проверить, что скалярное произведение в этих формах удовлетворяет указанным свойствам. Принятым названием векторных линейных пространств с таким скалярным произведением является *Евклидово* пространство, и оно обозначается как R^n .

Геометрически это означает, что \mathbf{x} и \mathbf{y} изображены с общей начальной точкой, и тогда длина \mathbf{x} умножена с длиной такой компо-

ненты y , которая проецируется на направление x . Очевидно, что полное скалярное произведение может быть определено как сумма скалярных произведений компонент каждого вектора.

В качестве простого примера возьмем два первых вектора, приведенных выше. Их скалярное произведение равно значению: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 7$.

Выше отмечалось, что некоторые классы функций могут быть линейными пространствами. Для этих пространств скалярное произведение может быть определено в интегральной форме. Например, существует векторное пространство действительных функций на замкнутом

интервале $[a, b]$ со скалярным произведением: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b \mathbf{x}(\xi) \mathbf{y}(\xi) d\xi$.

Другим примером служит набор всех функций таких, что интеграл от x^2 по всей действительной оси ограничен. Пространство таких функций обозначается L^2 или $L^2(\mathbf{R})$. В этом случае скалярное произведение

может быть записано в виде $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\xi) \mathbf{y}(\xi) d\xi$.

Указанные виды скалярного произведения позволяют определить *норму вектора* или его длину как $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Она, в свою очередь, дает возможность определить расстояние и угол между векторами. Так, угол θ между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется выражением

$$\cos(\theta) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|)^{-1}. \quad (\text{П2.1})$$

Определение угла приводит нас к понятию *ортогональных векторов*. Два ненулевых вектора называются ортогональными, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, т. е. $\theta = 90^\circ$.

Часто векторные пространства со скалярным произведением (\mathbf{x}, \mathbf{y}) таким, что норма вектора определяется указанным выше образом, называются *гильбертовыми* пространствами и обозначаются H . Согласно тому, что такая норма позволяет определить расстояние, гильбертово пространство – метрическое. Примеры конечномерных гильбертовых пространств включают евклидовы пространства. Примером

бесконечномерного гильбертова пространства будет L^2 с соответствующим скалярным произведением.

Линейно независимые векторы. Эти векторы составляют основу базиса любого линейного пространства. Главное их свойство состоит в том, что любая линейная комбинация таких векторов не равна нулевому вектору. Традиционно именно это свойство используется для определения независимых векторов в линейных пространствах.

В математических курсах обычно вначале вводится понятие линейной зависимости векторов. Говорят, векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} являются линейно зависимыми, если линейная комбинация этих векторов будет равна нулю для некоторых значений коэффициентов a, b, c . Например, не сложно получить, что при значениях $a = -1.0$, $b = 5.0$, $c = -3.0$ линейная комбинация приведенных выше векторов будет равна нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = (-1.0)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 5.0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3.0)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1.0 \cdot 1 + 5.0 \cdot 2 - 3.0 \cdot 3 \\ -1.0 \cdot 5 + 5.0 \cdot 1 - 3.0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Следовательно, векторы являются линейно зависимыми.

Из понятия линейной зависимости векторов мы сразу получаем, что такие векторы могут быть всегда представлены линейной комбинацией других векторов. Так, если $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x} = -(b/a)\mathbf{y} - (c/a)\mathbf{z}$ и т. п.

В том случае, когда нет таких значений коэффициентов, что линейная комбинация векторов равна нулю, исключая тождественное равенство нулю всех коэффициентов, векторы называются линейно независимыми. Отсюда следует, что ни один из них не может быть представлен линейной комбинацией других векторов.

Оценим, насколько это важное понятие. Им выделяются векторы в линейном пространстве, которые обладают уникальными свойствами такими, что они не могут быть описаны другими векторами из этого пространства.

Не сложно показать, что любая пара из трех рассматриваемых векторов \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} будет линейно независима. Поэтому ни один из этих векторов не может быть представлен другим вектором. Например, если

мы хотим получить $ax + by = 0$, тогда мы должны решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1a + 2b = 0, \\ 5a + 1b = 0. \end{cases}$$

Но она имеет единственное решение только при $a = 0, b = 0$.

Базис конечномерного и бесконечномерного линейного пространства. В начале рассмотрим базис конечномерного пространства. Базис векторного пространства определяется как подмножество векторов $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n$ в L таких, что они – линейно независимы и являются основой пространства L . В математических курсах доказывается, что для n -мерного векторного линейного пространства число линейно независимых векторов может быть не более чем n . Поэтому базис такого пространства может содержать только n векторов. Следовательно, если $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n)$ являются некоторым набором векторов в n -мерном пространстве L , то эти векторы формируют его базис тогда и только тогда, когда каждый вектор $\mathbf{v} \in L$ может быть однозначно записан как

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{l}_1 + \alpha_2 \mathbf{l}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{l}_i, \quad (\text{П2.2})$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – являются элементами цифрового поля. Векторное пространство L может иметь много различных базисов, однако в каждом из них всегда будет n базисных векторов. Такое число базисных векторов называется размерностью L . Каждый набор линейно независимых векторов может быть преобразован в базис векторного пространства.

Для евклидова пространства соответствующее скалярное произведение позволяет представить косинус угла θ_{jk} между двумя базисными векторами \mathbf{l}_j и \mathbf{l}_k на основе выражения (П2.1) как $\cos(\theta_{jk}) = (\mathbf{l}_j, \mathbf{l}_k) (\|\mathbf{l}_j\| \|\mathbf{l}_k\|)^{-1}$, что дает геометрическое понимание *ортогонального базиса* евклидова пространства. В случае, когда базисные векторы ортогональны между собой, базис называется ортогональным. Когда норма всех векторов ортогонального базиса равна единице, то такой базис называется *ортонормированным*. Как правило, векторы

ортонормированного базиса обозначаются $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, и для них выполнено следующее свойство: $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}$, где $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$ является символом Кронекера.

Простейшим примером ортонормированного базиса является стандартный базис евклидова пространства R^n , где каждый вектор из набора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ представляет собой направляющую i -й координаты с единичной длиной. Например, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и т. п. Представление выше векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ просто организовать по средствам соответствующего базиса. В частности, $\mathbf{x} = 1.0\mathbf{e}_1 + 5.0\mathbf{e}_2$ при $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0)^T$, где T означает операцию транспонирования, переводящую вектор-строку в вектор-столбец.

Вращение (или поворот) позволяет переходить от одного базиса к другому. Фактически, имея некоторый ортонормированный базис, можно посредством поворотов перейти к стандартному координатному базису. Такое преобразование сохраняет скалярное произведение и называется ортогональным преобразованием.

Обычно когда необходимо проделывать некоторые вычисления, то лучше использовать ортонормированный базис. Например, формула проектирования векторного пространства наиболее проста в этом базисе. Пытаясь выполнить такое преобразование, предварительно лучше построить ортонормированный базис. Одним из популярных путей нахождения ортонормированного базиса является метод Грама–Шмидта.

Наиболее привычными векторными пространствами являются двух- и трехмерные евклидовы пространства. Векторы в этих пространствах представимы парами или тройками реальных чисел и изображаются геометрически стрелками. Эти векторы могут быть сложены по правилу параллелограмма или умножены на действительное число. Поведение геометрических векторов при использовании этих операций обеспечивает хорошее интуитивное понимание поведения векторов в более абстрактных векторных пространствах, которые не имеют геометрической интерпретации.

Когда векторное пространство является бесконечной размерностью, то базис существует как одна из предполагаемых аксиом. Под-

множество векторов такого базиса, если оно линейно независимо и плотно, может быть названо полным базисом пространства. Когда L является гильбертовым пространством, его полный базис называется гильбертовым базисом. Очевидно, что в гильбертовом пространстве может быть определен ортогональный и ортонормированный базис. В этих случаях ортонормированная последовательность будет последовательностью нормализованных ортогональных векторов или функций. В общем случае гильбертово пространство H имеет гильбертов базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$, если \mathbf{e}_i является элементом ортонормированного базиса и каждый элемент $\mathbf{v} \in H$ может быть представлен в форме

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i \quad \text{для } \alpha_i \text{ таких, что } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty. \quad \text{Хотя, строго говоря,}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ не являются базисом векторного пространства, потому что не существует элементов, которые представляются конечной линейной комбинацией. Поэтому нам требуется использовать специальный термин «гильбертов базис».

В случае гильбертовых пространств (включая евклидово пространство как частный случай) очень просто определить параметры разложения каждого элемента пространства по элементам ортогонального базиса. Для этого необходимо использовать понятие скалярного произведения. Итак, если мы запишем его для произвольного вектора $\mathbf{v} \in H$ и вектора \mathbf{l}_j из ортогонального базиса пространства, то получим следующие равенства:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{l}_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j) = \alpha_j (\mathbf{l}_j, \mathbf{l}_j), \quad (\text{П2.3})$$

которые следуют из свойств скалярного произведения и определения векторов ортогонального базиса. Из этого следует, что параметры разложения имеют вид

$$\alpha_j = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{l}_j)}{(\mathbf{l}_j, \mathbf{l}_j)}. \quad (\text{П2.4})$$

Когда $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots)$ является ортонормированным базисом, т. е. $\mathbf{l}_j = \mathbf{e}_j$, тогда $\alpha_j = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_j)$. Примеры гильбертовых базисов и соответствующих разложений рассмотрены далее в спектральных базисах (приложение 3).

В заключение сделаем небольшой комментарий относительно выбора базиса при решении практических задач. Несмотря на все преимущества ортогонального базиса и простоту представления в нем векторов гильбертова или евклидова пространства, такие базисы не всегда являются наилучшими с точки зрения решения конкретной физической или геофизической задачи. Здесь очень важным представляется, какой смысл имеют сами векторы базиса, а также коэффициенты соответствующего разложения. Так, в одном из методов современного спектрального анализа, основанном на разложении Прони, используются векторы неортогонального базиса, которыми являются затухающие синусоиды. Но при этом они несут важный геофизический смысл и лучше соответствуют изучаемым процессам, что дает преимущество их использования перед формальными ортогональными базисными векторами или функциями.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ

Ортогональный базис из тригонометрических функций. Ряды Фурье представляют собой разложение периодической функции $f(t)$ в виде бесконечных сумм синусов и косинусов. Ряды Фурье позволяют использовать ортогональность связей синус- и косинус-функций. Выполненные выше рассуждения дают возможность почувствовать, что такое построение является представлением элементов гильбертова пространства в соответствующем базисе (см. приложение 2).

Вначале рассмотрим действительные периодические функции $f(t)$, заданные на конечном интервале $[-\pi, \pi]$. Такие функции должны удовлетворять некоторым условиям. В математических курсах эти условия обсуждаются достаточно подробно. Мы же укажем только классические условия Дирихле, которые обычно приводятся в литературе. Они могут быть кратко сформулированы следующим образом.

1. Функция $f(t)$ является периодической с периодом 2π , т. е. $f(t) = f(t + 2\pi)$.
2. Она кусочно-непрерывна, с конечным числом разрывов, обладающих конечной величиной.
3. Обладает конечным числом максимумов и минимумов.
4. Интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ является сходящимся.

Эти условия являются достаточными, но не все из них необходимы. Вместе с тем по счастливой случайности все известные функции, которые отвечают природным явлениям и наблюдаются в реальном эксперименте, включая геофизические данные, отвечают условиям Дирихле и, таким образом, могут быть проанализированы посредством рядов Фурье.

Теперь покажем, что набор функций $(1, \sin t, \sin 2t, \dots, \cos t, \cos 2t, \dots)$ удовлетворяет условиям Дирихле и может являться гильбертовым базисом пространства. Тригонометрические функции из этого набора будем обозначать $h_j(t)$.

Условия 1 и 3 очевидно выполнены для функций $h_j(t)$. Условие 3 выполнено для любого фиксированного n у $\sin nt$ и $\cos nt$, так же как

и сходимость соответствующих интегралов (это условие 4). Более того, эти функции обладают свойствами ортогональности, потому что скалярное произведение для этого случая определяется как

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt, \text{ а требуемые интегралы равны } \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \begin{cases} \sin nt \\ \cos nt \end{cases} dt = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \begin{cases} \sin nt \sin mt \\ \cos nt \cos mt \end{cases} dt = \pi \delta_{nm}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt = 0$$

для всех n и m . Это просто проверить, используя справочники. Так же получаются и нормы $h_j(t)$: $|1| = \sqrt{(1,1)} = 2\pi$, $|\sin nt| = \sqrt{(\sin nt, \sin nt)} = \pi$ и $|\cos nt| = \pi$.

Таким образом, все функции $h_j(t)$ могут быть взяты как гильбертов базис (ортогональный, но не ортонормированный), а функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена по этим функциям (или векторам) в виде, аналогичном выражению (П2.2)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i(t), \quad (\text{П3.1})$$

или в привычной форме

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt. \quad (\text{П3.2})$$

Такое представление или разложение функций официально названо рядами Фурье в память французского инженера и математика Жезефа Фурье, который сформулировал теорему о разложении некоторой функции в сумму бесконечного числа тригонометрических функций.

Вычисление и изучение рядов Фурье известно как гармонический анализ и является очень полезным при представлении произвольной периодической функции в виде набора простых элементов. Эти элементы могут быть отдельно использованы при решении некоторой проблемы, а затем объединены с целью получения полного решения или его аппроксимации с той точностью, которая желательна или требуется на практике. В частности, такой подход является активно используемым для решения обыкновенного дифференциального уравне-

ния однородной линейной структуры. Если такое уравнение может быть построено для случая простой синусоиды, то решение для произвольной функции получается сразу же через ее разложение в ряд Фурье и подстановкой в него решения для отдельных компонент. Для некоторых специальных случаев, когда ряды Фурье дают точное представление решения (т. е. они суммируемы), этот подход может давать аналитическое решение.

Любой набор функций, который может быть представлен в форме полной ортогональной системы или ортогонального базиса, сформирует соответствующий ряд, аналогичный ряду Фурье. Например, используя ортогональность корней функции Бесселя, получаем первый из возможных рядов, который называется рядом Фурье–Бесселя. Такой ряд может быть эффективно использован при решении прямой задачи распространения сейсмических колебаний в упругой среде.

Для представления любой функции $f(t)$ в виде ряда Фурье важно уметь определять соответствующие коэффициенты α_i этого разложения. Это просто сделать, если вспомнить общие сведения из курса линейной алгебры, представленные в приложении 2 (в частности, как определяются параметры разложения произвольного элемента векторного, а также гильбертова пространства по элементам ортогонального базиса через выражения (П2.3) и (П2.4)), а затем подставить в эти формулы вместо вектора \mathbf{v} функцию $f(t)$ и вместо вектора \mathbf{I}_j функцию $h_j(t)$. Тогда получим, что коэффициенты выражений (П3.1), (П3.2) определяются как

$$\alpha_i = \frac{(f, h_j)}{(h_j, h_j)} = \frac{1}{|h_j|} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_j(t) dt. \quad (\text{П3.3})$$

Согласно полученным выше выражениям и значениям данных интегралов, а также нормам функций $h_j(t)$ просто определяются следующие равенства:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (\text{П3.4})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Определение коэффициентов и самого разложения функции в ряд Фурье может быть обобщено на любой конечный интервал длительностью $2L$. Для этого достаточно просто изменить переменные $t = \frac{\pi t'}{L}$, $dt = \frac{\pi dt'}{L}$ и интервалы интегрирования от $[-\pi, \pi]$ к $[-L, L]$. Тогда новая переменная t' будет $t' = \frac{Lt}{\pi}$, и, подставляя эти выражения в полученные выше формулы, будем иметь

$$f(t') = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi t'}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{\pi t'}{L},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t') dt';$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t') \cos n \frac{\pi t'}{L} dt' \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t') \sin n \frac{\pi t'}{L} dt'.$$

Несложно понять, что они могут быть записаны в следующей общей форме:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \quad (\text{П3.5})$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos n \frac{\pi t}{L} dt$$

$$\text{и} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin n \frac{\pi t}{L} dt.$$

Это представление находит наибольшее применение в приложениях. Здесь функция $f(t)$ является заданной уже на произвольном ко-

нечном интервале $[-L, L]$ и имеет период $2L$. Аналогичные формулы будут справедливы (при соответствующем изменении пределов интегрирования) и для интервала $[0, 2L]$.

Полученные выражения (ПЗ.5) позволяют нам сделать один не совсем строгий переход и показать путь прихода к фурье-преобразованию, которое необходимо при изучении непериодических функций. Для этого подставляем интегральную форму коэффициентов a_0, a_n, b_n в разложение функции, заменяем переменную t в этих интегралах на некую внутреннюю переменную ξ и переходим к следующему виду ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right] \cos \frac{n\pi t}{L} + \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right] \sin \frac{n\pi t}{L} \right\}.$$

Теперь можно выполнить простые действия в этом выражении (переставить $\cos \frac{n\pi t}{L}$ и $\sin \frac{n\pi t}{L}$ под интеграл, объединить интегралы в один и т. д.) и получить

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \times \left[\cos \frac{n\pi\xi}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} + \sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} \right] d\xi.$$

Далее, применяя формулу $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, приходим к окончательному выражению

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{n\pi}{L} (t - \xi) d\xi,$$

где уже можно использовать следующее обозначение: $\omega_n = n\pi \cdot L^{-1}$. Оно полностью отвечает понятию круговой частоты, потому что для интервала длительностью T шаг дискретизации частоты равен $\Delta f = T^{-1}$ согласно теореме Котельникова, поэтому $\omega_n = 2\pi \Delta f n$, так как $T = 2L$. Это обозначение приводит к равенствам

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{n\pi}{L} - \frac{(n-1)\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \quad \text{и} \quad \frac{1}{L} = \frac{\Delta\omega}{\pi}.$$

После подстановки данного обозначения и последнего из приведенных равенств в полученное представление приходим к уравнению

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \omega_n(t - \xi) d\xi, \quad (\text{ПЗ.6})$$

которое является некоторым дискретным аналогом интеграла Фурье для конечного интервала.

Для получения окончательного выражения нам необходимо рассмотреть $L \rightarrow \infty$. При этом без доказательства будем полагать, что имеют место следующие изменения в полученном уравнении (ПЗ.6).

1. Интеграл $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi$ исчезнет в силу сходимости интеграла от функции $f(t)$ (см. 4-е условие Дирихле).

2. Приращение $\Delta\omega$ становится бесконечно малым и в пределе стремится к $d\omega$. При этом дискретное значение ω_n становится непрерывной переменной ω .

3. Сумма может быть преобразована в эквивалентный интеграл с пределами от 0 до ∞ .

Как результат этих изменений, в предельном переходе имеем следующее выражение, которое является *интегралом Фурье*:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(t - \xi) d\xi. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Выражение (ПЗ.7) непосредственно приводит нас к *преобразованию Фурье* и различным его формам. Так, используя простые равенства:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(t - \xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \omega t \cos \omega \xi + \sin \omega t \sin \omega \xi] d\xi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left[\cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi + \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega,
\end{aligned}$$

получим выражения для *косинус-* и *синус-преобразований* соответственно:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi \quad \text{и} \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi.$$

Для приложений важной является комплексная форма настоящего преобразования. Для ее получения нам необходимо использовать формулу Эйлера, которая определяет связь между тригонометрическими и экспоненциальными функциями: $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, где $i = \sqrt{-1}$ – комплексная единица. Формулу элементарно преобразовать в $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})2^{-1}$ и $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(2i)^{-1} = -i(e^{i\theta} - e^{-i\theta})2^{-1}$. Подставляя эти выражения в ряд Фурье, получим его комплексную форму для случая периодической функции $f(t)$, определенной на интервале $[-\pi, \pi]$.

Формулу Эйлера также можно применить к интегралу Фурье (ПЗ.7) в форме косинусов и синусов трансформаций. Тогда получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - ib(\omega)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})] d\omega.$$

Проведя в этом интеграле группировку членов, представим его в виде суммы двух интегралов. При этом первый интеграл будет содер-

жать члены с множителем $e^{\bar{i}\omega t}$, а второй – с множителем $e^{-\bar{i}\omega t}$. Тогда исходный интеграл может быть переписан как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) - \bar{i}b(\omega)] e^{\bar{i}\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) + \bar{i}b(\omega)] e^{-\bar{i}\omega t} d\omega.$$

Во втором интеграле выполним замену переменной ω следующим образом: $\omega' = -\omega$. При этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) + \bar{i}b(\omega)] e^{-\bar{i}\omega t} d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} [a(-\omega') + \bar{i}b(-\omega')] e^{\bar{i}\omega' t} d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [a(-\omega') + \bar{i}b(-\omega')] e^{\bar{i}\omega' t} d\omega'. \end{aligned}$$

Если косинус- и синус-преобразования удовлетворяют следующим предположениям: $a(\omega)$ является четной функцией, т. е. $a(-\omega) = a(\omega)$, а $b(\omega)$ – нечетной функцией, т. е. $b(-\omega) = -b(\omega)$, то последний интеграл может быть переписан как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) + \bar{i}b(\omega)] e^{-\bar{i}\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [a(\omega') - \bar{i}b(\omega')] e^{\bar{i}\omega' t} d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [a(\omega) - \bar{i}b(\omega)] e^{\bar{i}\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

После этого снова объединим оба интеграла и получим, что функция $f(t)$ задается выражением

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega) - \bar{i}b(\omega)] e^{\bar{i}\omega t} d\omega,$$

а с введением новой функции $F(\omega) = a(\omega) - \bar{i}b(\omega)$ интеграл может быть переписан в окончательной компактной форме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\bar{i}\omega t} d\omega. \quad (\text{П3.8})$$

Комплексная функция $F(\omega)$ известна как *фурье-преобразование* или *спектр Фурье* функции $f(t)$. А полученный выше интеграл называется *обратным преобразованием Фурье*. После подстановки форм косинус- и синус-преобразований в функцию $F(\omega)$ получим

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt,$$

а с использованием формул Эйлера придем к

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Этот интеграл также называется преобразованием Фурье. При этом часто функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ называются вещественной и мнимой частью фурье-преобразования или спектра Фурье.

Функция $F(\omega)$ как комплексная величина может быть представлена через две функции: модуля $|F(\omega)|$ и аргумента $\varphi(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)},$$

где $|F(\omega)| = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$ и

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right] + 2k\pi = \operatorname{tg}^{-1} \left[-\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right] + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Согласно нашим предположениям, что $a(\omega)$ – четная функция, а $b(\omega)$ – нечетная, функция аргумента $\varphi(\omega)$ является нечетной функцией, т. е. $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$. Часто модуль $|F(\omega)|$ и аргумент $\varphi(\omega)$ называются *амплитудным* и *фазовым спектром* соответственно.

Для приложения 5, где представлены характеристики случайных величин и процессов, будет необходимо понятие, связанное со спектром Фурье, – это энергетический спектр. Известно, что значение энергии любой реальной функции $f(t)$ определяется следующим образом:

$$\bar{E} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\}^2 dt,$$

где $\{f(t)\}^2$ представляет мгновенную энергию в момент t , а интеграл дает полную энергию функции.

Вначале рассмотрим интеграл от произведения двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Используя формулу обратного преобразования Фурье, перейдем к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{\bar{i}\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{\bar{i}\omega t} dt \right] d\omega. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что внутренний интеграл является преобразованием Фурье с отрицательной частотой $-\omega$ и, таким образом, он равен $F_1(-\omega)$, а вспомнив предположения о функциях $a(\omega)$ и $b(\omega)$, получим $F_1(-\omega) = a(-\omega) - \bar{i}b(-\omega) = a(\omega) + \bar{i}b(\omega) = F_1^*(\omega)$, где $F_1^*(\omega)$ — комплексно сопряженное к $F_1(\omega)$. Тогда окончательно имеем следующую формулу для рассматриваемого интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(\omega) F_2(\omega) d\omega. \quad (\text{П3.9})$$

Последняя формула часто используется во многих теоретических и практических приложениях преобразования Фурье. В частности, для случая энергетического спектра нам требуется положить $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ и $F_1(\omega) = F_2(\omega) = F(\omega)$. После этого приходим к

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Из этого равенства следует, что свойства энергетического спектра полностью представляются поведением амплитудного спектра функции $f(t)$.

На этом можно закончить рассмотрение классического преобразования Фурье и его свойств. Однако еще остается очень много важных

деталей, к которым необходимо обращаться в прикладных вопросах при рассмотрении спектральной декомпозиции отдельных сигналов и их последовательностей, что отмечалось в разд. 2.7, 2.8 и 2.9.

Далее постараемся перенести идеи разложения функций по тригонометрическому базису, которые имели фундаментальное значение в анализе функций и сыграли существенное значение в развитии имевшихся математических идей о преобразовании функций, на другие системы ортогональных функций, в частности вейвлеты.

Итак, ряды Фурье открыли дверь в новый функциональный мир. После этого посредством изучения существенного числа функций, для которых имела место сходимость ряда Фурье, ортогональные системы понемногу начали лидировать в математике. Одновременно происходил переход от простого понятия частотного анализа к понятию масштабного анализа, что означало анализ функций $f(t)$ посредством создания математических структур, которые меняются по масштабу. При этом структура базисных функций должна была удовлетворять следующему принципу: конструируем функцию, перемещаем ее некоторым образом и изменяем ее масштаб; применяем данную структуру для аппроксимации сигнала, затем повторяем процедуру. Берем базовую структуру, сдвигаем ее и изменяем масштаб снова. Применяем ее для сигнала, чтобы получить новую аппроксимацию, и т. д. Такое разбиение масштабов повторяется до тех пор, пока не теряется чувствительность по отношению к шуму, потому что всё время измеряется средняя флуктуация сигнала по отношению к различным масштабам.

Для геофизических данных такое изменение масштаба может играть существенную роль при обнаружении и изучении разномасштабных объектов как в наблюдаемых данных, так и в исследуемой среде (см. гл. 1). Особенно это важно с учетом того, что на каждом уровне масштабов требуется использовать многопараметрические функции (см. разд. 2.5), чтобы изменять одновременно пространственные и временные (или частотные) параметры в отличие от рядов Фурье, обладающих однопараметрическим масштабом.

Большим классом функций, который создает нам возможность таких многопараметрических и разномасштабных построений, являются вейвлеты, или вейвлет-функции. Формально вейвлеты могут быть введены следующим образом. Функция $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ называется ортонормальным вейвлетом, если она может быть использована для определения гильбертова базиса, который является полной ортогональной

системой для гильбертова пространства интегрируемых в квадрате функций. Гильбертов базис конструируется как семейство функций $\{\psi_{jk}(t)\}$ посредством двухпараметрического масштабного изменения и перемещения материнской функции $\psi(t)$ в форме

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (\text{ПЗ.10})$$

для целых j и k . Это семейство функций является ортонормальной системой, если она ортонормальна для стандартного скалярного произведения в $L^2(\mathbf{R})$, т. е. $(\psi_{jk}, \psi_{lm}) = \delta_{jl} \delta_{km}$, где δ_{jl} и δ_{km} – символы Кронекера (см. приложение 2). Требование полноты обеспечивает представление каждой $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ в виде разложения по данному базису:

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t). \quad (\text{ПЗ.11})$$

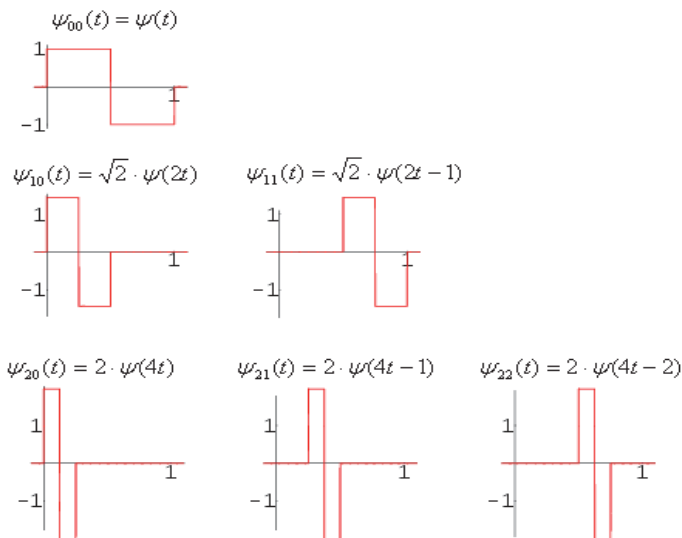
Таким образом, для вейвлет-базиса важным является задание материнской функции. Первое упоминание о вейвлетах содержалось в приложении к диссертации Хаара (1909). Функции Хаара обладали одним свойством, которое обеспечивало им стремление к нулю для бесконечного интервала. К сожалению, вейвлеты Хаара не были непрерывно дифференцируемыми, что ограничивало их приложение.

Однако для нас эти функции интересны как первый пример такого подхода. Поэтому давайте рассмотрим его более внимательно. Материнская функция в этом случае определяется как

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & 1/2 < t \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

а семейство функций $\{\psi_{jk}(t)\}$ будет представлено в форме (ПЗ.10). Поэтому для первых целых j и k функции $\{\psi_{jk}(t)\}$ задаются как $j = 0$, $k = 0$, $\psi_{00}(t) = \psi(t)$; $j = 1$, $k = 0$, $\psi_{10}(t) = \sqrt{2} \cdot \psi(2t)$; $j = 1$, $k = 1$, $\psi_{11}(t) = \sqrt{2} \cdot \psi(2t - 1)$; $j = 2$, $k = 0$, $\psi_{20}(t) = 2\psi(4t)$; $j = 2$, $k = 1$,

$\psi_{21}(t) = 2\psi(4t - 1)$; $j = 2$, $k = 2$, $\psi_{22}(t) = 2\psi(4t - 2)$. Вид соответствующих ступенчатых функций показан на рисунке. Здесь хорошо видно их поведение и изменение в зависимости от масштаба и положения. Рисунок позволяет показать, что эти функции ортогональны с нормой, равной единице.



Структура вейвлет-функций Хаара для нескольких первых значений целых j и k

Значительное число различных приложений разнообразных вейвлетов при анализе геофизических данных и решении интерпретационных задач можно найти в современной литературе или в Интернете, задав соответствующий поиск.

Приложение 4

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ДЛЯ SVD-РАЗЛОЖЕНИЯ

В разд. 2.5 основного текста дана общая характеристика качества решения, получаемого на основе обобщенной матрицы. Там же отмечалось, что свойства решения для линейных задач, к которым относятся и многочисленные методы многомерного регрессионного анализа, зависят от трех параметров (N, K, r) , связанных с матрицей линейного оператора \mathbf{A} . Эти свойства определяются следующими соотношениями указанных параметров.

(1) Решение задачи существует	При $r = N$
(2) Решение единственное	При $r = K = N$
(3) Решение задачи не существует	Когда ранги расширенной и исходной матрицы не совпадают, а также при $r = K < N$
(4) Имеется бесконечное множество решений	При $K > N$

Более детально свойства решения удается рассмотреть, если при его получении использовалось SVD-разложение матрицы \mathbf{A} [6], представляемое выражением (2.10). Существенную роль при построении данного разложения играют ортогональные матрицы \mathbf{S}, \mathbf{D} . Формально они могут быть определены из систем векторных или матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{d}_i = v_i \mathbf{s}_i \\ \mathbf{A}^T \mathbf{s}_i = v_i \mathbf{d}_i, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{V} \mathbf{S} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{D}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{V}^2 \mathbf{D} \\ \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{S} = \mathbf{V}^2 \mathbf{S}, \end{cases} \quad (\text{П4.1})$$

где $\mathbf{s}_i, \mathbf{d}_i$ – соответствующие вектор-столбцы матриц \mathbf{S}, \mathbf{D} размерности N и K . Согласно последней системе матричных уравнений векторы \mathbf{d}_i являются собственными векторами матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и принадлежат пространству M^K по своей структуре. Аналогично \mathbf{s}_i – собственные векторы матрицы $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ и принадлежат пространству Y^N . При этом значения диагональных элементов матрицы \mathbf{V} равны корню квадратному из отличных от нуля собственных чисел любой из матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

или $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Отметим, что данное разложение можно обобщить и на случай $K = \infty$.

Теперь рассмотрим свойства обобщенного решения линейной задачи (2.9), когда в качестве матрицы \mathbf{H} взято выражение (2.11), использующее SVD-разложение, т. е. $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{y}$. При анализе свойств будем опираться на сочетания параметров (N, K, r) .

I случай: $r = K = N$.

\mathbf{A} – квадратная матрица и $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Поэтому согласно последней из систем (П4.1) будем иметь совпадающие собственные векторы для обоих матричных уравнений. Отсюда $\mathbf{S} = \mathbf{D}$ и, следовательно, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{S}^T$ и $\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{S}^T$. Теперь несложно показать, что $\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Но это означает, что $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}$, т. е. построенное на основе псевдообратной матрицы решение будет совпадать с истинным решением задачи: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

II случай: $r = K < N$.

В этом случае получаем несовместную систему линейных уравнений, так как наблюдения не представимы линейной комбинацией параметров. Следовательно, в исходных наблюдениях имеются несоответствия модели, которые можно отнести к ошибкам. Поэтому здесь целесообразно воспользоваться первой из сформулированных в разд. 2.5 характеристик качества решения и минимизировать величину вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_y$. Для этого достаточно построить квадратичный функционал: $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T\boldsymbol{\varepsilon}_y = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}})$ и минимизировать его по вектору параметров $\boldsymbol{\theta}$. Как известно [4, 10], решение, отвечающее данному условию, должно удовлетворять системе уравнений метода наименьших квадратов (м.н.к.): $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$. Но в силу равенства $r = K$ существует матрица, обратная к $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Поэтому решение этой системы представимо в форме (2.12).

Теперь воспользуемся сингулярным разложением матрицы \mathbf{A} и, подставив его в указанную форму решения, запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = (\mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{S}^T \mathbf{y} = \\ &= (\mathbf{D} \mathbf{V}^2 \mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{S}^T \mathbf{y}.\end{aligned}$$

Используя тот факт, что $r = K$, а также определение обратной матрицы, не сложно построить обратную матрицу: $(\mathbf{D} \mathbf{V}^2 \mathbf{D}^T)^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{D}^T$. Отсюда окончательно получаем:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{S}^T \mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{y}.$$

Таким образом, в данном случае обобщенное решение, построенное на основе SVD-разложения, совпадает с решением м.н.к.

III случай: $K > N = r$.

Здесь размерность параметров модели больше имеющихся наблюдений. В частности, у нас может быть всего лишь одно наблюдение, а исследуемая модель может содержать бесконечное число параметров. Подобные задачи часто возникали на начальных этапах развития геофизики, к примеру, при сейсмологических или магнитотеллурических исследованиях. Покажем, что в этом случае решение, построенное на основе сингулярного разложения матрицы \mathbf{A} , совпадает с так называемым нормальным решением задачи, которое минимизирует норму решения, позволяя определить некоторые осредненные вариации параметров исследуемого объекта.

Возьмем вектор-столбцы \mathbf{d}_i , составляющие матрицу \mathbf{D} . По определению и в силу условия $r = N$ они все ортонормированные, т. е. являются базисными векторами пространства моделей M^K . Далее, дополнив их такими же векторами \mathbf{d}_{0i} до полного базиса пространства M^K , сформируем на основе последних матрицу $\mathbf{D}_0 = \{\mathbf{d}_{0i}; i = N+1, \dots, K\}$. При этом будут выполнены равенства:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{D}_0^T \mathbf{D}_0 = \mathbf{I}_{K-N}, \quad \mathbf{D}^T \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_0^T \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$, как и выше, обозначает нулевой вектор, состоящий из одних нулевых значений.

Тогда любой вектор параметров $\boldsymbol{\theta} \in M^K$ представим в виде следующей линейной комбинации:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_0\boldsymbol{\alpha}_0, \quad (\text{П4.2})$$

где векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}_0$ состоят из величин коэффициентов, обеспечивающих это разложение.

Представив также вектор наблюдений $\mathbf{y} \in Y^N$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы \mathbf{S} как базисных векторов пространства Y^N и воспользовавшись определением матрицы \mathbf{S} , получим равенства:

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} \text{ и } \boldsymbol{\beta} = \mathbf{S}^T\mathbf{y}. \quad (\text{П4.3})$$

Используя при записи исходного линейного уравнения, связывающего параметры модели с наблюдениями (например, (2.6)), сингулярное разложение для матрицы \mathbf{A} и представления (П4.2), (П4.3), имеем следующее матричное уравнение:

$$\mathbf{SVD}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_0\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta},$$

а раскрыв скобки и воспользовавшись равенствами относительно матриц \mathbf{D} , \mathbf{D}_0 , получим $\mathbf{SV}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}$. Отсюда

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \text{ и } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\alpha}$ фиксируется исходными наблюдениями, а $\boldsymbol{\alpha}_0$ – произвольный.

Если записать квадратичный функционал относительно произвольного вектора $\boldsymbol{\theta}$, то $\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_0\boldsymbol{\alpha}_0)^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_0\boldsymbol{\alpha}_0) = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_0^T\boldsymbol{\alpha}_0$, то можно видеть, что он будет минимальным при $\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$. Поэтому для получения решения с минимальной нормой нам необходимо взять вектор

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{DV}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{DV}^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{y}.$$

Видно, что он совпадает с обобщенным решением линейной задачи (2.9), когда в качестве матрицы \mathbf{H} берется выражение (2.11), построенное на основе SVD-разложения матрицы \mathbf{A} .

IV случай: $r < K, N$.

Для различных соотношений K, N в данном случае будем иметь две ситуации. Первая ситуация $K < N$. Тогда имеется бесконечное множество решений, получаемых по методу наименьших квадратов, так как матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ вырождена. Вторая ситуация $K > N$ может привести нас к отсутствию точного решения. Но в обеих ситуациях решение, построенное на основе сингулярного разложения, всегда существует и обладает минимальной нормой ошибки и решения.

Заметим, что большинство обратных задач геофизики, имеющих дело с реальными данными и моделями среды, относятся именно к этому случаю. Так, задача коррекции статики относится к первой из указанных ситуаций.

При исследовании воспользуемся схемой случая III. Записав разложения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_0\boldsymbol{\alpha}_0, \\ \mathbf{y} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}_0\boldsymbol{\beta}_0 \end{cases} \quad (\text{П4.4})$$

и подставив их в исходное уравнение, приходим к равенству

$$\mathbf{S}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_0. \quad (\text{П4.5})$$

Потребуем также выполнения двух условий:

1) минимум нормы ошибки: $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T \boldsymbol{\varepsilon}_y = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}})$;

2) минимум нормы вектора решения: $\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_0^T \boldsymbol{\alpha}_0$.

Из первого получаем $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\beta}$. Для этого достаточно воспользоваться равенством (П4.5) и представлениями (П4.4) при записи $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T \boldsymbol{\varepsilon}_y$. Второе же обеспечивается равенством $\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$. Таким образом, приходим к результату случая III.

Несмотря на то что решение с указанными свойствами не всегда является наилучшим в геофизическом смысле, его можно рекомендовать как конструктивное при решении линеаризованных обратных задач. Оно позволяет в процессе построения производить анализ вычислительных особенностей строящегося решения. В частности, классифицировать различные компоненты по помехоустойчивости и выделять главные компоненты, содержащие основную часть решения. Это

следует из интерпретации значений сингулярных чисел, входящих в матрицу V .

Рассматриваемый подход к построению решения на основе сингулярного разложения матрицы A может быть применен для изучения структуры не единственно определяемых компонент векторов в решении задачи. Такие компоненты могут составлять часть пространства решений (оно еще называется нуль-многообразием) и являются важной характеристикой задачи, определяющей свойства ее решения. Изучение этих компонент (векторов) может существенно повлиять как на исследование общей проблемы неединственности решения задачи, так и на вопросы получения и использования априорной информации, устраняющей имеющуюся неединственность. При этом может быть определена оптимальная структура априорной информации, обеспечивающая ее минимальный объем и наибольшую статистическую устойчивость получаемых оценок. Соответствующие примеры относятся к проблемам коррекции временных статических поправок, поверхностно согласованной деконволюции (см. разд. 2.9) и определения импульсной характеристики целевых объектов среды (см. разд. 3.5).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

О наличии некоторых изменений в наблюдаемых природных явлениях и процессах, которые невозможно точно описать или предсказать, люди догадывались давно. Это могло быть объяснено их божественной природой, т. е. высокой сложностью, не поддающейся человеческому разуму. Но иногда возникали и интересные примеры, связанные с относительно простыми явлениями, которые невозможно было предсказать. Наиболее известные – бросание монеты и кубика. Хотя предметы были рукотворной природы и даже идеальными в исполнении, но не удавалось точно предсказать, какая грань «выпадет» при очередном бросании. Наиболее пытливые умы пытались понять, с чем это может быть связано. Ими чаще всего оказывались исследователи или ловкачи. Проводя наблюдения и измерения, они обнаруживали, что для идеальных предметов среднее число «выпадения» каждой из граней должно быть одинаковым. Для неидеальных предметов такого равенства уже не существует. Таким образом, возникала задача, как изобразить ловкача, сколько необходимо сделать наблюдений (измерений), чтобы обнаружить обман. В этой задаче проявляются два аспекта случайности: непредсказуемость и оценка возможного исхода.

Еще интереснее рассматривать измерения, где случайная составляющая совмещается с закономерными (регулярными, трендовыми) составляющими (см. разд. 1.5). Классическим примером являются геодезические измерения. Как бы мы не стремились повышать их точность, у нас остается некоторая ошибка. Таким образом, приходится решать вопрос о том, тратить ли огромные средства на повышение точности измерений или применить некоторые вычисления, основанные на поведении измеряемых величин и позволяющие улучшить качество определяемых характеристик (параметров). Первым об этом задумался Иоганн Гаусс. Будучи разумным человеком и имея большой опыт работы с числами, математическими вычислениями, он определил характеристики изменений в данных и предложил метод выделения регулярных (трендовых) составляющих, позволяющий согласовывать наблюдения в узловых точках. Его результаты оказались настолько полезными, что на много лет и до настоящего времени определили прикладные возможности геодезических наблюдений. Как

всегда, наблюдательность и понимание проблемы привели к фундаментальным фактам: нормальному или гауссовому распределению и методу наименьших квадратов. Их важность подтверждают центральная предельная теорема и совпадение оценок, получаемых по методу наименьших квадратов и методу максимального правдоподобия для соответствующего распределения.

К настоящему времени теория вероятностей и математическая статистика существенно развились. Имеются прекрасные учебники и фундаментальные исследования, соответствующая библиография есть в [4, 10]. Но, к сожалению, часто высокий уровень математического формализма затрудняет их изучение специалистами, работающими в прикладных областях. Для таких специалистов не очень важно разбираться в тонкостях теории, но необходимо понимать, что любая случайная величина обладает своим уникальным распределением и любая оценка (характеристика), построенная с использованием этой величины, также будет являться случайной величиной. Поэтому, как бы мы ни стремились увеличивать число измерений, в получаемом нами результате будет присутствовать элемент случайности, т. е. неопределенности. Другое дело, что при правильной обработке данных можно улучшить качество оценок, т. е. уменьшить неопределенность и повысить достоверность прогноза.

Понятие вероятности. Исходя из этой идеи о существовании некоторой характеристики случайной величины, определяющей исход конкретного эксперимента или события, может быть построено математическое описание таких исходов. Наиболее формализованно оно было выполнено русским математиком А.Н. Колмогоровым на теоретико-множественной основе в 30-х годах XX столетия. В качестве множества выступали возможные исходы эксперимента. Очевидно, что эти исходы могли представлять собой сложные события. Поэтому внутри множества выделяются элементарные события, которые дают возможность представить сложное событие в виде набора элементарных событий. В некотором смысле такое представление аналогично разложению по линейно-независимым векторам для линейного пространства (приложение 2). Но подобная аналогия очень поверхностная, так как работа с множествами событий не является линейной алгеброй и обладает своими правилами.

Когда множество событий определено и определена алгебра всевозможных подмножеств, включаемых в это множество, над ними может быть определена некоторая функция, обозначаемая $P(A)$ и называ-

мая вероятностью события A . Функция может принимать действительные значения от 0,0 до 1,0 и удовлетворяет следующим аксиомам.

1. **Аксиома неотрицательности:** для любого события $P(A) \geq 0$.

2. **Аксиома нормированности:** вероятность достоверного события A^* равна единице, т. е. $P(A^*) = 1$.

3. **Аксиома аддитивности:** вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. $P\left(\sum_k A_k\right) =$

$$= \sum_k P(A_k).$$

В силу того что мы не рассматривали подробно алгебру событий, нам необходимо уточнить, что достоверным событием называется то, которое обязательно произойдет в эксперименте, а несовместными событиями называются взаимно исключающие события, т. е. они не могут происходить совместно. С понятием несовместного события связано и понятие элементарного события, которое неразложимо по другим событиям и несовместно с другими элементарными событиями или исходами эксперимента.

Сформулированные аксиомы приводят ко многим следствиям и теоремам [4]. Для их лучшего понимания используются различные аналоги функции вероятности. Эти аналоги появлялись как следствие исторического (эмпирического) понятия случайного события или в процессе развития теоретико-множественной концепции. Для последней наиболее распространенным является определение вероятности как нормированной меры длин или площадей геометрических объектов, ассоциируемых со случайными событиями. Соответствующие образы упрощают понимание многих теоретических положений.

Так, на рис. П5.1 эллипсами изображены некоторые области, а событием считается, например, попадание мяча в определенную область или ее часть. Для рис. П5.1, *а* имеется два несовместных события. Они предполагают попадание мяча в область с горизонтальными или вертикальными полосами. Если мяч попал в одну из этих областей, то он не может попасть в другую область. На рис. П5.1, *б* показана более сложная ситуация, состоящая в возможности попадания в одну из областей, а также в совместную часть области, а рис. П5.1, *в* демонстрирует включение одного события в другое, но не их полное совпадение, т. е. попадание в область с вертикальной штриховкой приводит к попаданию в другую область, но попадание в область с горизонтальной штриховкой еще не гарантирует попадание во вторую область. Оче-

видно, элементарным событием здесь является попадание в точку, а любое из приведенных событий может быть разложено по таким элементарным событиям.

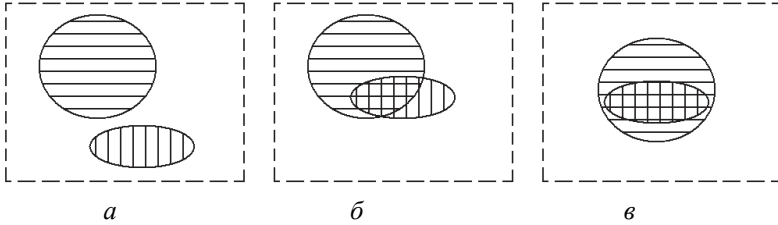


Рис. П5.1. Использование геометрических образов для теоретико-множественного определения вероятности (пояснения в тексте)

Приведенные рисунки хорошо иллюстрируют основные теоретические положения. Например, следующие соотношения для вероятностей: аксиому 3 (рис. П5.1, а) или одно из важных свойств вероятностей, что если событие A вложено в событие B , т. е. $A \subseteq B$, то справедливо неравенство $P(A) \leq P(B)$ (рис. П5.1, в). Для совместных же событий, когда одно из событий полностью не вкладывается в другое для их общего события $A \cup B$, имеем $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B - A)$, где $A \cup B$ – пересечение событий A и B (рис. П5.1, б), а $B - A$ – разность событий.

Важным для приложений является понятие условной вероятности. Его можно вводить как дополнительную аксиому, но можно представлять и геометрическими образами. Смысл понятия заключается в определении вероятности одного события, когда наступило другое. Например, нам необходимо определить вероятность попадания мяча в область с горизонтальной штриховкой (рис. П5.1, б), когда он попал в область с вертикальной штриховкой, имеющей вероятность попадания $P(B)$. Интуитивно (и геометрически) понятно, что такая вероятность будет составлять часть от $P(B)$, и эта часть определяется их совместной областью, т. е. $P(A \cap B)$, следовательно

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (\text{П5.1})$$

где $P(B) \neq 0$

Очевидно, что это выражение симметрично относительно событий A и B . Поэтому можно построить соответствующее выражение для условной вероятности $P(B | A)$. Из этих выражений следуют равенства:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A). \quad (\text{П5.2})$$

Особую практическую значимость условная вероятность приобретает, когда отсутствует возможность непосредственного определения исхода эксперимента или исследования, но может быть получен результат, связанный с таким исходом. Здесь лишь необходимо знание о вероятности как получения соответствующего результата, так и появления требуемого исхода, а это не всегда бывает возможно.

Условная вероятность позволяет получить две важные формулы: полной вероятности и Байеса. Первая получается путем представления события A в виде разложения по независимым событиям B_i , которые могут являться и элементарными событиями. Такое разложение можно записать в виде объединения событий $A \cap B_i$, т. е. $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$.

Следовательно,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i). \quad (\text{П5.3})$$

Выражение (П5.3) называется формулой полной вероятности.

Теперь рассмотрим вторую формулу как вероятность появления одного из независимых событий B_i , когда произошло событие A . Соответствующая условная вероятность будет

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}, \quad (\text{П5.4})$$

что называется формулой Байеса. Формула (П5.4) имеет широкое практическое распространение, так как позволяет определить вероятность некоторого независимого события по результатам выполненного эксперимента. Такую вероятность принято называть апостериорной вероятностью.

Геометрические образы оказались настолько полезными при изучении теории вероятностей, что получили специальное название диаграмм Эйлера–Венна. Уже указывалось, что геометрические образы дают наглядное представление о вероятности и позволяют связать формальное понятие вероятности как некоторой меры события с ее частотным аналогом. Для приведенных диаграмм, изображенных на рис. П5.1, такая связь устанавливается следующим образом. Пусть мяч всегда попадает в обозначенный пунктиром прямоугольник и пусть попадание в любую точку этого прямоугольника имеет равный шанс, или равновероятно (это условие очень важно), тогда частота попаданий в заданную область равна отношению площади этой области к площади прямоугольника. Но площади, как и длины, являются некоторыми интегральными характеристиками, и здесь рождается идея представления вероятности в виде интеграла по интервалам или в более общем случае по областям, которые могут быть определены и в многомерных пространствах. Одномерные интегралы проще, поэтому они часто служат для введения различных понятий теории вероятностей.

Таким образом, вероятность события A можно представить следующим интегралом: $P(A) = K \int_D f(r) dr$, где D является областью интегрирования

(для рис. П5.1 это изображенные эллипсы), r – параметр интегрирования, а $f(r)$ определяет распределение вероятностных свойств (частоты попадания мяча в некоторые точки внутри области); если считается, что они равновероятностные, то $f(r) \equiv 1$ и интеграл просто определяет размер области. При неравномерности распределения частотных или вероятностных свойств функцию $f(r)$ можно рассматривать как некоторую плотностную характеристику, а интеграл – как меру веса соответствующей области. Нормирующий коэффициент K требуется для обеспечения второй аксиомы (для рис. П5.1 он был бы связан с площадью окружающего квадрата). Формально этот коэффициент можно было бы включить в функцию $f(r)$.

Распределения случайных величин. Реализация идеи представления вероятностей через интегралы по некоторым областям, которые определяют некоторую меру этой области, оказалась конструктивной для математических построений. При этом были введены две функции. Первая – функция распределения, которая в случае одномерной обла-

сти имеет вид $F(x) = \int_{-\infty}^x dP(\xi)$, где $dP(\xi)$ вероятность, или мера, характеризующая попадание в точку ξ . Тогда $F(x)$ характеризует (определяет) вероятность попадания в интервал $(-\infty, x]$, т. е. $F(x) = P(-\infty < \xi \leq x)$. В том случае, когда вероятность попадания в точку ξ можно охарактеризовать через плотностную функцию, т. е.

$dP(\xi) = f(\xi)d\xi$, тогда $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi)d\xi$, а $f(\xi)$ называется функцией плотности распределения вероятности.

Обе вводимые функции связаны между собой и определяемыми вероятностями простыми соотношениями:

$$F'(x) = f(x) \text{ и } P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi)d\xi. \quad (\text{П5.5})$$

Математики часто работают с функцией распределения. Но для приложений более удобными и ясными являются функции плотности распределения. Они имеют и более понятный частотный смысл, состоящий в числе попаданий некоторой случайной величины в заданные интервалы. Примерами служат гистограммы, изображенные на рис. 1.15 основного текста, хотя согласно выражениям (П5.5) гистограммы не являются функцией плотности распределения, а представляют лишь некоторую ее оценку. Но к статистическим свойствам мы обратимся ниже.

Многочисленные виды функций распределения и функций плотности распределения вероятности приведены в книгах по теории вероятностей и статистической обработке данных (ссылки имеются в [4, 10]). Там же можно найти особенности функции плотности распределения, которые важны при анализе реальных геофизических данных. Рисунок П5.2 демонстрирует некоторые из особенностей таких функций. Так, функция, представленная на рис. П5.2, *а*, обладает несимметричностью и смещенностью относительно $x = 0$, а функция, рис. П5.2, *б* еще и неунимодальна, так как имеет два максимума.

При решении практических задач не всегда удается определить функцию плотности распределения. Тогда возникает необходимость охарактеризовать ее важные свойства. Это можно сделать с использо-

ванием различных характеристик. Одними из них являются моменты. Уже само название указывает на их подобие физическим характеристикам, связанным с плотностями и массами. Математически они выглядят следующим образом:

$$M^{(p)} = \int_a^b \xi^p f(\xi) d\xi, \tag{П5.6}$$

где величина p называется порядком момента. Через моменты вводятся такие важные характеристики, как математическое ожидание и дисперсия.

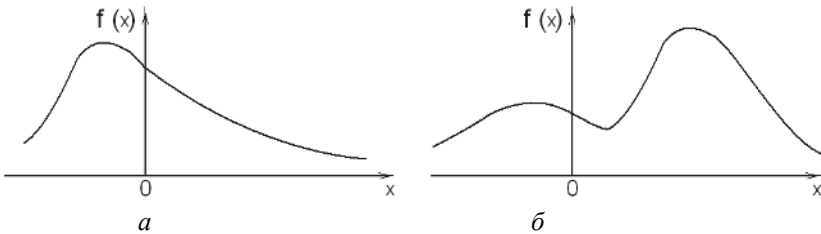


Рис. П5.2. Различные виды функции плотности распределения вероятности

Часто в реальном эксперименте наблюдается (измеряется) несколько величин, каждая из которых может быть представлена вероятностной моделью, т. е. относительно каждой величины считается, что она случайна. Такие величины могут быть связаны между собой или быть независимыми. В том и другом случае необходимо рассматривать совместную функцию распределения всех анализируемых величин. Однако во втором случае имеется существенное упрощение, связанное с возможностью представления совместной функции плотности распределения в виде произведения отдельных плотностей, определенных для каждой из величин. Все сказанное переносится и на векторные величины, где случайными считаются компоненты вектора. Более того, это же относится и к случайным функциям и процессам. Очевидно, что подобные обобщения потребовали значительных математических исследований.

Статистические оценки. Математические построения, как правило, опираются на некоторые устоявшиеся модели, основой которых

могут являться и реальные наблюдения. В то же время каждое наблюдение (измерение), как и эксперимент, где оно было получено, уникально. Поэтому, хотя мы и можем предполагать, что результаты наших измерений обладают некоторыми заданными вероятностными характеристиками, при обработке данных требуется постоянно уточнять эти характеристики. Для выполнения таких уточнений в математической теории вероятностей сформировался отдельный большой раздел – математическая статистика. Первоначально он выполнял вспомогательную роль. Но его практическое значение оказалось настолько велико, что с некоторого момента теория вероятностей превратилась во вспомогательный инструмент при статистических построениях.

Формально статистикой называется любая функция от выборки случайных величин. Таким образом, для формирования статистики необходимо вначале определить значения некоторой случайной величины, затем выполнить с ними требуемую операцию и получить результат. В силу того что измеряемая величина является случайной, при повторном определении ее значений результат изменится. Следовательно, статистика сама обладает свойствами случайной величины и своими функциями распределения. Приведенный вывод крайне важен для понимания основ математической статистики.

Простейшими примерами статистик являются среднее арифметическое значение некоторой измеряемой величины и значения гистограмм, определяющие число попаданий измеряемой величины в заданные интервалы (области). Для того чтобы подчеркнуть зависимость статистики от выборки значений случайной величины, часто добавляется слово «выборочное» (например, выборочное среднее или выборочное среднеквадратическое отклонение).

Рассмотрим первую из простейших статистик. Она определяется выражением

$$\tilde{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (\text{П5.7})$$

где x_i – значения измеряемой величины, полученные в проведенном эксперименте, а n – число таких измерений. Сама по себе величина \tilde{x} может говорить о чем угодно. В то же время интуитивно понятно, что она характеризует одну из главных особенностей измеряемой случайной величины. Но что это за особенность и какими свойствами она об-

ладает, помогает разобраться теория вероятностей. В частности, она является оценкой математического ожидания, т. е. первого момента функции плотности распределения (П5.6). Также при большом количестве независимых измерений, обладающих одним и тем же распределением, свойства \bar{x} будут определяться нормальным распределением, что является следствием центральной предельной теоремы [4]. Указанный факт является очень существенным для практических целей, где отсутствует информация о возможных видах распределения анализируемых случайных величин. Дело в том, что нормальное распределение обладает такими важными характеристиками, как унимодальность и симметричность.

Вторая статистика строится через определение числа попаданий величины x_i в заданный интервал $(a, b]$, т. е. подсчитывается число m_j , для которых выполнено условие $a < x_i \leq b$. Но это, при использовании нормированных значений $n^{-1} \cdot m_j$, совпадает с частотным понятием вероятности события. Таким образом, нормированные значения гистограммы можно воспринимать как оценку вероятности $P(a < x_i \leq b)$. Тогда согласно соотношениям (П5.5) они же являются оценками разностей функции распределения, а при уменьшении интервалов $(a, b]$ дают оценку функции плотности распределения вероятности. Конечно, при уменьшении интервалов необходимо увеличивать число наблюдений. Именно при решении вопросов о том, насколько значительно требуется увеличить число наблюдений и уменьшить величину интервалов, помогает теория вероятностей.

В книгах и учебниках по математической статистике (библиография имеется в [4, 10]) приводятся исследования различных статистик с особенностями их построения и определением свойств. Возможно, наиболее важными в прикладном плане являются следующие свойства: смещенность, состоятельность и эффективность. Прежде чем рассматривать эти свойства, мы должны определить, для чего строится статистика, т. е. значение какого параметра θ мы хотим определить на ее основе. В качестве θ могут выступать параметры геофизических наблюдений или моделей среды, а также характеристики вероятностных особенностей (математическое ожидание, дисперсия и пр.). Если определено назначение статистики, то ее можно обозначить как функцию от выборки и назвать оценкой параметра θ , т. е. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_i; i = 1, \dots, n)$, а далее рассматривать смещенность $\hat{\theta}$ от истинного

значения θ^* . Затем можно рассмотреть состоятельность, т. е. сходимость $\hat{\theta}$ к θ^* при увеличении объема выборки, а также эффективность $\hat{\theta}$, т. е. насколько быстро сходится $\hat{\theta}$ к θ^* . Даже небольшой обзор приведенных выше результатов по теории вероятности подсказывает нам, что подобные исследования будут существенно зависеть от вероятностных характеристик значений x_i .

Сделаем небольшое заключение, относящееся к полезности и целесообразности применения статистических оценок при обработке геофизических данных. Подобные оценки имеет смысл использовать при анализе наблюдений, когда отсутствуют модели, представляющие все особенности наблюдаемых данных. Их полезно применять также в процессе отбраковки выбросов и при анализе качества полученных исходных данных или результатов проведенной обработки. Такие оценки могут составлять основу для проверки гипотез в предположениях о возможной неопределенности получаемых результатов как обработки данных, так и их интерпретации.

ПРИМЕР РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Основной целью выполнения таких заданий является практическое освоение способов преобразования и подготовки исходных геофизических данных, а также приобретение навыков по применению полученных знаний в модельных ситуациях и умению самостоятельно работать с литературными источниками в рамках проблематики дисциплины.

Задание: «Использование различных окон при расчете спектров сигналов»

Задание выполняется в программном пакете MatLab и состоит из следующих основных шагов.

1. Подготовка скрипта, позволяющего выполнять преобразование Фурье для различных теоретических сигналов, задаваемых пользователем.

2. Обеспечение дополнительной возможности использования различных окон при выполнении преобразования Фурье.

3. Выполнение преобразования Фурье без использования и с использованием окон для одного из возможных сигналов с анализом полученных результатов.

Подготовленный скрипт должен состоять из трех функций: функция построения исходного сигнала, функция выбора типа окна и функция отображения спектральных характеристик. Помимо указанных функций скрипт должен включать в себя определение априорных данных (шаг дискретизации, интервал определения сигнала, сам сигнал) и процедуры, отвечающие за дискретное преобразование Фурье.

Входными параметрами для функции построения исходного сигнала служили величины сигнала и временные отсчеты, в функции производилось построение и отображение сигнала от времени и отсчетов при помощи процедуры 'plot'.

После построения исходного сигнала производится выбор окна и по необходимости усечения сигнала согласно длительности окна. Для осуществления выбора различных окон могут быть использованы пять типов: прямоугольное окно, окно Чебышёва, окно Ханна, треугольное окно и флаттоп-окно. По завершении выбора типа окна пользователь должен выбрать начало и конец интервала, для которого в дальнейшем будет проводиться спектральный анализ. Выбрав начало и конец интервала, пользователь подает усеченный сигнал заданной длительности на выход функции, применяющей определенный тип окна к заданному сигналу.

Сформированный указанным выше способом сигнал с заданным типом окна подается на вход функции 'fft', в MatLab отвечающей за БПФ. Важно, что на вход процедуры должен подаваться развернутый сигнал с помощью процедуры 'ifftshift'. Процедура 'ifftshift' переставляет элементы таким образом, чтобы нулевая частота являлась первым элементом. Полученный результат также может быть преобразован к виду, когда нулевая частота расположена в центре, это реализуется процедурой 'fftshift'. Важно знать, что процедура 'ifftshift' используется до 'fft', а 'fftshift' – после. Несоблюдение этих условий приводит к ошибкам в расчетах фазового спектра. Полученный таким образом дискретный спектр сигнала может быть преобразован к виду амплитудного и фазового спектра. Для этого можно воспользоваться процедурами 'abs' и 'angle'.

Последней частью скрипта является визуализация полученных результатов. За визуализацию полученных результатов отвечает специально созданная функция отображения спектральных характеристик. На вход этой функции подаются значения амплитудных и фазовых спектров, после чего процедурой 'plot' реализуется визуализация спектральных характеристик от параметра частоты.

На рис. РГ3.1 показано одно из возможных окон, определяемое в системе MatLab функцией `tukeywin` с кодом `win=tukeywin(n,r)`.

Отметим, что функция `tukeywin` генерирует n -точечное окно Тьюки в форме вектора `win`. Края окна Тьюки косинусоидально сглажены. Параметр r является коэффициентом сглаживания, отвечает за отношение ширины сглаженной области к ширине области, где значение весовой функции равно единице. При $r \leq 0$ окно Тьюки переходит в прямоугольное окно, а при $r \geq 1$ – в окно Ханна.

На рис. РГ3.2 показано влияние окна Ханна при расчете спектра участка синусоиды с частотой 25 Гц. Видно, что оконное преобразова-

ние Фурье сглаживает рассчитанные спектральные характеристики сигнала. Кроме того, в результате применения оконного преобразования Фурье может возникать эффект растяжения спектра, что приведет к некоторой потере разрешенности в спектральной области.

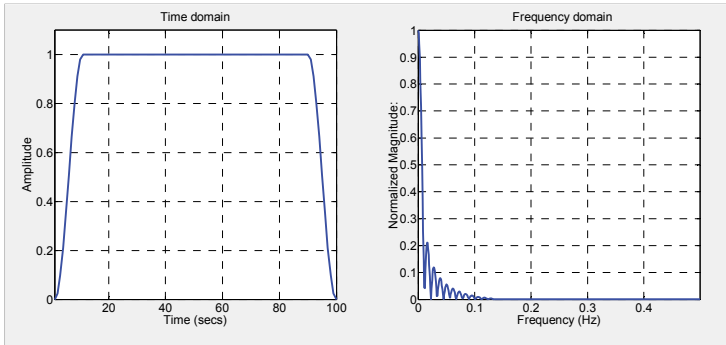


Рис. РГЗ.1. Вид окна Тьюки (слева) и его амплитудный спектр (справа)

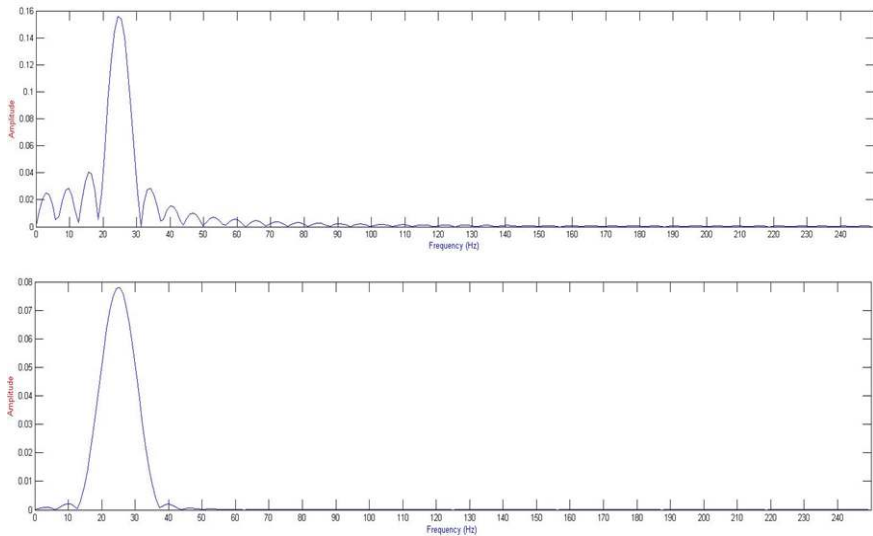


Рис. РГЗ.2. Амплитудные спектры участка синусоиды с частотой 25 Гц: без использования окна (вверху) и с использованием окна Ханна (внизу)

Примеры контрольных вопросов по выполненному РГЗ

1. Какому типу окна отвечает процесс «вырезания» сигнала из полного наблюдения?
2. Насколько сильно влияет тип окна на спектр сигнала?
3. Какое окно будет предпочтительнее при ограниченной длительности сигнала: совпадающее с его длительностью или превышающее эту длительность?

Рекомендуемая литература к выполняемому РГЗ

Кроме приведенных в списке литературы книг [7, 8] для более глубокого знакомства со свойствами сглаженных спектров рекомендуется:
Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971. – Вып. 1. – 317 с.; 1972. – Вып. 2. – 285 с.

Оценивание выполнения РГЗ при проведении зачетной сессии

Если в процессе подготовки РГЗ и его демонстрации, выполняемой с пояснениями проделанной работы, студент не обнаруживает понимания поставленной перед ним проблемы, а также найденных им решений или полученных выводов, то в процессе сдачи зачета он получает дополнительный вопрос по основным разделам учебной программы. «Зачет» получает студент, полностью ответивший на один (или два, если есть еще дополнительный) вопрос. При недостаточно полных ответах на поставленный (поставленные) вопрос преподаватель может задать еще ряд дополнительных вопросов, подтверждающих, что студент правильно ориентируется в обсуждаемой проблеме, и только в этом случае студент получает «Зачет» по данному курсу.

КОММЕНТАРИИ К ЗАДАНИЯМ И ЗАДАЧАМ

К главе 1

Задание 1

При выполнении задания обратите внимание на то, каким образом были получены эти данные и что измерялось при проведении наблюдений, в рамках каких предположений получались данные, какими характеристиками они обладали (точность, объем и т. д.). Если они носили описательный характер, то можно ли их формализовать? Если вы сами не можете ответить на поставленные вопросы, то обратитесь к руководителю или специалистам, с которыми вы работаете.

Задание 2

Даже если объект ваших исследований не имеет непосредственного отношения к геологическим объектам или элементам строения среды, постарайтесь соотнести его с соответствующими понятиями (предметами). Например, вами готовится некоторый прибор для измерения геофизического (физического) параметра. В этом случае попытайтесь понять, какие геологические процессы и характеристики он позволит изучать. Постарайтесь также узнать у своего руководителя или оценить самостоятельно, какие дополнительные возможности для изучения этих процессов и характеристик даст разрабатываемый прибор.

Задание 3

Если задание является для вас простым, значит, вами и руководителем хорошо определены цели исследований.

Задание 4

При работе с реальными данными вам могут помочь более опытные коллеги. Они объяснят, что в ваших данных может считаться полезной, а что мешающей компонентой, а также расскажут об условности этих понятий. Сложнее будет обстоять дело, если вы работаете с математическим моделированием. Тогда можете считать, что модели-

руемые данные и являются полезной компонентой, а различие между модельными данными и наблюдаемыми определяется мешающей компонентой. Поэтому постарайтесь соотнести получаемые модельные данные с реальными наблюдениями, для которых могла бы быть использована применяемая математическая модель.

К главе 2

Задание 1 и 2

Чаще обсуждайте эти вопросы с более опытными коллегами и руководителем. Это не только повысит уровень вашей квалификации, но, возможно, продемонстрирует ограничения и узкую направленность используемых способов обработки.

Задание 3

Ощущения всегда субъективны, но они являются отражением нашего опыта. Поэтому если у вас возникает ощущение недостаточности применяемых процедур, то постарайтесь подготовить соответствующие примеры. Обсудите их с коллегами и руководителем. Возможно, они объяснят демонстрируемые результаты и подскажут иные способы обработки, обеспечивающие повышение качества результатов. Но, может быть, вы определите некоторую существенную проблему, которая потребует развития новых способов.

Задание 4

Если вы выполнили предыдущие три задания, то у вас могли появиться идеи для выполнения этого задания. Постарайтесь пофантазировать на тему дополнительных процедур. Не бойтесь безумных идей. Когда вы начнете размышлять над их направленностью и реализацией, то всё встанет на свои места. А то, что они первоначально выглядят безумными, так это нормально, потому что все умные уже давно реализованы.

Задача 2-01

Задача не имеет однозначного решения в силу неточно определенной структуры сигналов. Поэтому ее решение может быть построено через рассмотрение конкретного примера (или примеров) путем соответствующего доопределения формы периодического сигнала.

Простейшими примерами являются тригонометрические функции $\cos(x)$ и $\sin(x)$. Тогда для функции $\cos(x)$ будем иметь: $T = 2\pi$, $\tau_1 = T/2 = \pi$ и $\tau_2 = T/4 = \pi/2$. Поэтому при таких сдвигах второй

сигнал $\cos(x + \tau)$ будет равен соответственно $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ и $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$. Из этого несложно получить как аналитические выражения для результата, так и его графическое представление.

Но более интересным решением может являться самостоятельное представление студентом некоторой периодической функции и анализ ее изменений при построении суммы и разности этой функции при указанных сдвигах.

Задача 2-02

В данном случае регрессионная модель (2.7) имеет вид $T = T_0 + bH + \xi$, где искомый градиент определяется величиной b , а ξ – некоторая случайная величина, влияющая на отклонение температуры от прямой линии. Решение задачи может быть построено методом наименьших квадратов (м.н.к), который позволяет объединить все наблюдения и получить общее решение задачи, записав полную систему (2.8) и применив выражение (2.12). Студенты также могут воспользоваться и другими существующими программными средствами.

Рассмотрим первый способ решения задачи. Для каждого наблюдения справедливым является представление вида

$$T_i = T_0 + bH_i + \xi_i.$$

Согласно условию задачи таких уравнений будет пять. Выпишем эти уравнения, подставив в них соответствующие значения T_i и H_i (при этом включим значения помехи ξ_i в наблюдаемые величины температуры согласно замечанию в разд. 2.5):

$$10.2 = T_0 + b \cdot 10,$$

$$12.7 = T_0 + b \cdot 20,$$

$$12.5 = T_0 + b \cdot 30,$$

$$14.0 = T_0 + b \cdot 40,$$

$$15.1 = T_0 + b \cdot 50.$$

Они позволяют нам убедиться в справедливости приведенного выше утверждения, относящегося к третьему соотношению параметров (N, K, r) для системы линейных уравнений с сочетанием, что решения задачи не существует (см. приложение 4). Несуществование решения

связано с тем, что, получив решение для какой-то пары уравнений, к примеру первому и второму уравнению: $T_0 = 7.7$; $b = 2.5$, мы видим, что оно не удовлетворяет любой другой паре.

Поэтому нам приходится прибегать к определенной редукции задачи, называемой методом наименьших квадратов (м.н.к), которое обеспечивает некоторое решение задачи (не обязательно наилучшее). Такое решение не соответствует абсолютно точно каждому из приведенных уравнений, а лишь минимизирует сумму квадратов отклонений наблюдаемой величины T_i от получаемых модельных значений $\hat{T}_i = \hat{T}_0 + \hat{b} \cdot H_i$, т. е. обеспечивает минимум величины:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_i (T_i - \hat{T}_i)^2 = \sum_i (T_i - \hat{T}_0 - \hat{b} \cdot H_i)^2,$$

где \hat{T}_0, \hat{b} – оценки соответствующих параметров применяемой регрессионной модели. Именно в этом смысле оно и является общим решением всей переопределенной системы.

Согласно общему выражению (2.12) для построения решения м.н.к необходимо построить вектор правых частей системы м.н.к в форме $\mathbf{A}^T \mathbf{y}$ и обратную матрицу $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Из структуры уравнений получаем, что

$$\mathbf{A}^T = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 5 & 150 \\ 150 & 5500 \end{Bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{Bmatrix} 1.1 & -0.03 \\ -0.03 & 0.001 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 64.5 \\ 2046 \end{Bmatrix}.$$

Тогда значения векторов оценок параметров определяются как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{Bmatrix} \hat{T}_0 \\ \hat{b} \end{Bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 1.1 & -0.03 \\ -0.03 & 0.001 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 64.5 \\ 2046 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.57 \\ 0,111 \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, температурный градиент (или, точнее, его оценка) равен $\hat{b} = 0,111$.

В заключение необходимо привести графическое изображение исходных наблюдений в виде точек с координатами (T_i, H_i) , направив

вертикальную ось вниз согласно направлению измерений в скважине. На этом же графике приводится и прямая линия, определяемая полученными оценками \hat{T}_0, \hat{b} .

Задача 2-03

В данном случае можно воспользоваться приведенной схемой построения решения задачи 2-02.

Но здесь важно будет определить не только оценки параметров линейной регрессии, а еще и величины $\hat{\sigma}^2(n-1)^{-1}$, где величина $n = 10$ по условию задачи. Именно они определяют оценку дисперсии [4]. Эти величины также должны быть нанесены на графическое изображение результатов решения задачи, что позволит сделать необходимые выводы по полученным измерениям.

Задача 2-04

Решение задачи может быть построено с использованием линейки, циркуля и элементарных вычислений. Необходимо только помнить о критическом угле, начиная с которого происходит формирование сигнала головной волны. По условию задачи его величина определяется $\sin r = 2/3$ (см. разд. 2.6).

Задача 2-05

Решение несколько сложнее, чем в задаче 2-04. Хотя здесь также можно обойтись только линейкой и циркулем, но придется усложнить вычисления и построения, так как необходимо будет построить перпендикуляр к наклонной границе, также изменится длина падающего и восходящего луча.

Существенным может оказаться и переход к системе наблюдений с изменяющимся положением источника–приемника относительно начала системы координат. Здесь можно рекомендовать брать исходную расстановку задачи 2-04, а в качестве второй взять 10 пар положений источников и приемников, взятых при симметричном расположении источника относительно имеющихся приемников. Еще одна рекомендация касается выбора угла наклона для границы. Его желательно выбирать в интервале $5 \dots 10^\circ$ от горизонтали.

Задача 2-06

При решении этой задачи желательно использовать два этапа. На первом этапе воспользуемся линейностью годографа головной волны, который представим выражением (2.15). Это позволяет нам определить (оценить) два параметра годографа c_0, c_1 аналогично задаче 2-02.

На втором этапе необходимо воспользоваться выражением (2.13), задающим связь параметров годографа с параметрами модели среды: V_0 , H , V_h , φ . Учитывая, что $\varphi = 0$, получаем соотношения

$$c_1 = \frac{1}{V_h} \quad \text{и} \quad c_0 = \frac{2H}{V_0} \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V_h^2}}.$$

Следовательно, $V_h = \hat{c}_1^{-1}$, где \hat{c}_1 – оценка соответствующего параметра годографа, полученная на первом этапе. Одновременно получаем, что по оценке второго параметра годографа \hat{c}_0 нам необходимо определить еще два параметра модели среды: V_0 и H . Очевидно, что это невозможно. Таким образом, по заданным временам прихода не могут быть определены все параметры модели, но могут быть определены две пары параметров: H , V_h или V_0 , V_h .

К главе 3

Задание 1

Если вам не удастся самому ответить на вопрос задания, то обязательно обсудите его с руководителем.

Задание 2

Фактически это задание требует от вас понимания проблематики той области геофизики, к которой относятся ваши исследования. Если вы не можете определить интерпретационную постановку задачи, то перечитайте разд. 3.1 и постарайтесь соотнести проводимые исследования с одним из элементов схемы рис. 3.1. После этого определите круг геологических задач, где могли бы быть использованы (применены) результаты таких исследований, что и даст интерпретационную постановку задачи.

Задание 3-6

Здесь несомненно потребуется обсуждение этих вопросов с вашими коллегами и руководителем. Оно может быть интересно всем. При таком обсуждении могут проявиться как очень многие проблемы используемых программных средств (например, закрытость постановок задач, упрощенность моделей и пр.), так и ограниченное взаимодействие различных подразделений компании, в которой вы работаете.

ПРЕДЛАГАЕМЫЕ ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Основные характеристики геофизических данных.
2. Способы получения и представления геофизической информации.
3. Различие и сходство данных, получаемых различными геофизическими методами.
4. Случайная и регулярная природа геофизических данных.
5. Планирование геофизического эксперимента.
6. Основные методы обработки геофизических данных.
7. Проблема выделения целевых объектов в геофизических наблюдениях.
8. Преимущества линейных способов обработки геофизических данных.
9. Регрессионный анализ и его использование при обработке данных.
10. Цели выделения и устранения трендовых составляющих.
11. Основные цели спектрального анализа.
12. Линейно-алгебраическая база современных спектральных преобразований.
13. Способы линеаризации геофизических задач и их связь с процессом обработки.
14. Обобщенные методы решения систем линейных уравнений и их свойства.
15. Нелинейные методы обработки геофизических данных.
16. Проблема устранения влияния верхней части разреза.
17. Обработка данных, направленная на определение параметров локальных объектов.
18. Критерии качества получаемых результатов.
19. Использование априорной информации при обработке и интерпретации данных.

20. Соотнесение результатов обработки с решаемыми геофизическими задачами.

21. Представление результатов обработки в интерпретационных комплексах.

22. Объединение результатов обработки данных различных геофизических методов.

23. Комплексирование геофизических методов при решении геологических задач.

Кроме предложенных тем, студенты могут сами сформулировать тему реферата в рамках разделов курса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛУЧАЕМЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ	8
1.1. Объекты геофизических исследований	8
1.2. Связь данных с объектами исследований	11
1.3. Способы представления геофизических данных	16
1.4. Особенности геофизических данных и методов их получения	18
1.5. Понятие полезной и мешающей компоненты	27
Задания и примеры контрольных вопросов	30
Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ	32
2.1. Преобразования геофизических данных	32
2.2. Соотношения линейных и нелинейных преобразований	35
2.3. Редукция	39
2.4. Способы многомерного направленного суммирования	42
2.5. Регрессионный и дисперсионный анализ	45
2.6. Регрессионные модели при обработке годографов волн	52
2.7. Классический и современный спектральный анализ	57
2.8. Обратная фильтрация или деконволюция	68
2.9. Поверхностно согласованная деконволюция	74
Задания, примеры контрольных вопросов и задач	77
Глава 3. МЕТОДЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ	80
3.1. Принципы интерпретации геофизических данных	80
3.2. Связь интерпретации с прямыми и обратными задачами	85
3.3. Общая характеристика методов интерпретации	92
3.4. Влияние результатов обработки на интерпретацию	95
3.5. Априорная информация и ее использование при обработке и интерпретации	98

Задания и примеры контрольных вопросов	104
Библиографический список	106
Приложения.....	107
Приложение 1. Метрические пространства.....	107
Приложение 2. Векторные и линейные пространства.....	111
Приложение 3. Спектральные базисы.....	124
Приложение 4. Свойства решения для SVD-разложения	137
Приложение 5. Случайные величины, их распределения и статистические оценки.....	143
Пример расчетно-графического задания	154
Комментарии к заданиям и задачам.....	158
Предлагаемые темы рефератов.....	164

Митрофанов Георгий Михайлович

**ОБРАБОТКА И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ**

Учебное пособие

2-е издание

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Кинит*
Дизайн обложки *А.В. Ладьяжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 31.01.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 40 экз. Уч.-изд. л. 9,76. Печ. л. 10,5. Изд. 20. Заказ № 386
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20